

工业和信息化部“十二五”规划教材

电 动 力 学

罗春荣 丁昌林 段利兵 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是工业和信息化部“十二五”规划教材,是由罗春荣教授在西北工业大学应用物理系讲授“电动力学”课程多年的讲义基础上整理而成的。本书根据理工科高等院校应用物理系学生的需要安排授课内容,根据学生的认知规律安排课程内容顺序,力求将基本理论和概念叙述得清楚易懂,公式推导尽可能详细,对基本方法尽可能多一些例证加以说明。

本书内容分为7章,建议授课学时为54~60学时。第0章为数学预备知识,第1章为静电场,第2章为静磁场,第3章为电磁现象的普遍规律,第4章为电磁波的传播,第5章为电磁波的辐射,第6章为狭义相对论。与传统教材不同的是,前3章的内容做了顺序调整。另外,在第1章和第4章介绍了电流变液的介电极化模型和左手材料的奇异电磁性质。

本书可作为理工科高等院校应用物理类专业电动力学课程的教材或参考书,也可作为综合大学、师范院校物理类各专业的教材或参考书,还可供其他专业的社会读者学习、参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学 / 罗春荣, 丁昌林, 段利兵编著. —北京: 电子工业出版社, 2016.3

工业和信息化部“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-27883-9

I. ①电… II. ①罗… ②丁… ③段… III. ①电动力学—高等学校—教材 IV. ①O442

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第304144号

策划编辑: 王晓庆

责任编辑: 王晓庆

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 17.25 字数: 442千字

版 次: 2016年3月第1版

印 次: 2016年3月第1次印刷

定 价: 40.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

本书是根据我在西北工业大学应用物理系讲授“电动力学”课程讲义的基础上整理而成的。时光荏苒，弹指一挥间，讲授“电动力学”课程整整三十年了。从应用物理系招收的第一届学生到现在，每一届学生及许多院系的研究生都听过我讲授的“电动力学”课程。讲授电动力学这么多年，我由一个刚进入高校任教的研究生，变成了指导青年教师的老教师，充其量我只是一个教书匠。回顾自己的教师生涯，得到了许多老师与前辈的培养与教导。

学生时代我有幸在兰州大学物理系学习理论物理课程，量子力学由钱伯初先生讲授，热力学统计物理由汪志诚先生讲授，广义相对论由段一士先生讲授，电动力学由葛墨林先生讲授，聆听了这些国内知名教授的课程，为我的讲课风格奠定了良好的基础。

在讲授这门课程过程中，我一直在想，理工科院校应用物理类专业的“电动力学”应该介于理科院校物理类专业的“电动力学”和工科院校相关专业的“电磁场理论”两门课程之间。在教学实践中也做了一些尝试，根据应用物理专业学生的需要安排授课内容，根据学生的认知规律安排课程内容顺序，力求将基本理论和概念叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法尽可能多一些例证加以说明。2014年这本教材被列入工业和信息化部“十二五”规划教材项目，借此机会将讲义整理出版，希望对学生学习这门课程有所收益，对青年教师讲授这门课程有所帮助。

全书内容分为7章，建议授课学时为54~60学时。第0章为电动力学的数学预备知识，第1章为静电场，第2章为静磁场，第3章为电磁现象的普遍规律，第4章为电磁波的传播，第5章为电磁波的辐射，第6章为狭义相对论。与传统教材不同的是，前3章内容做了顺序调整。另外，在第1章和第4章介绍了电流变液的介电极化模型和左手材料的奇异电磁性质。这两部分内容与赵晓鹏教授团队的研究方向相关，在此感谢他的一贯支持与帮助。

本书稿由丁昌林博士和段利兵副教授协助整理完成，丁昌林参与了第0、2、3、4、5、6章的整理工作，段利兵参与了第1章的整理工作，全书插图由段利兵、胡明娟绘制，全书的习题答案由宋坤博士整理。本书提供配套多媒体电子课件，请登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)注册下载，也可联系本书编辑(wangxq@phei.com.cn)。

从1992年起，我参加了由西安交通大学吴寿镗先生主编的《电动力学》教材编写组，2001年我参加了由西安交通大学吴百诗先生主编的《大学物理学》教材编写组。参与这两本教材的编写，使我积累了一些编写教材的知识和经验，我才有勇气和信心编写这本教材，在此向他们表示感谢。

本教材的编写得到了工业和信息化部人事教育司、西北工业大学教务处和理学院的大力支持，在此深表感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请使用本书的读者批评指正。

罗春荣
于西安 西北工业大学
2016年2月

目 录

第 0 章	数学预备知识	1
0.1	矢量的乘法	1
0.1.1	矢量的点乘	1
0.1.2	矢量的叉乘	1
0.1.3	矢量的张量积	2
0.2	标量场的梯度	3
0.3	矢量场的散度和散度定理	4
0.3.1	矢量场的散度	4
0.3.2	散度定理	5
0.4	矢量场的旋度和斯托克斯定理	5
0.4.1	矢量场的旋度	5
0.4.2	斯托克斯定理	6
0.5	亥姆霍兹定理	6
0.6	∇ 算符对函数的运算	7
0.6.1	∇ 算符的一般运算规则	7
0.6.2	∇ 算符的其他常用公式	8
0.7	张量简介	10
0.7.1	张量的概念	10
0.7.2	张量的主要性质	12
0.7.3	张量的运算	12
	习题	13
第 1 章	静电场	14
1.1	真空中的静电场方程	14
1.1.1	库仑定律和电场强度	14
1.1.2	静电场的散度	15
1.1.3	静电场的旋度	17
1.1.4	真空中的静电场方程	17
1.2	电介质中的静电场方程	19
1.2.1	电介质的极化	19
1.2.2	介质中的静电场方程	21
1.3	静电场的边值关系	23
1.3.1	法向分量的跃变	24
1.3.2	切向分量的跃变	25
1.4	静电场的标势及其微分方程	27

1.4.1	静电场的标势	27
1.4.2	静电势的微分方程和边值关系	29
1.4.3	静电场的能量	31
1.5	静电场问题的解及其唯一性	32
1.5.1	静电场的基本问题	32
1.5.2	静电场问题的唯一性定理	33
1.6	镜像法	37
1.6.1	镜像法的基本思想	37
1.6.2	镜像法求解静电场问题	38
1.7	分离变量法	48
1.7.1	分离变量法的适用范围	48
1.7.2	分离变量法求解静电场问题	49
1.8	有限差分法	59
1.8.1	差分方程	59
1.8.2	差分方程组的求解	61
1.9	电多极矩	65
1.9.1	电势的多级展开	65
1.9.2	电多极矩	66
1.9.3	电荷体系在外电场中的能量	76
1.9.4	电流变液的介电极化模型	78
	习题	80
第 2 章	静磁场	82
2.1	恒定电流	82
2.1.1	电荷守恒定律	82
2.1.2	欧姆定律的微分形式	83
2.1.3	恒定电流的电场	83
2.2	真空中的静磁场方程	85
2.2.1	静磁场的实验定律	85
2.2.2	真空中静磁场的基本方程	86
2.2.3	磁场旋度和散度公式的证明	87
2.3	磁介质中的静磁场方程	90
2.3.1	介质的磁化	90
2.3.2	介质中的静磁场方程	92
2.4	静磁场的边值关系	93
2.4.1	法向分量的跃变	93
2.4.2	切向分量的跃变	94
2.5	磁场的矢势及其微分方程	96
2.5.1	矢势	96
2.5.2	矢势的微分方程	97
2.5.3	A-B 效应	99

2.6	磁矢势法	100
2.7	磁标势法	103
2.7.1	引入磁标势的条件	103
2.7.2	磁标势的微分方程	104
2.8	磁多极矩	112
2.8.1	矢势的多级展开式	112
2.8.2	静磁场的能量	116
2.8.3	电流系统与外磁场的相互作用能	117
2.8.4	磁偶极子在外磁场中的相互作用能	118
	习题	120
第 3 章	电磁现象的普遍规律	121
3.1	电磁感应定律	121
3.2	麦克斯韦方程组	122
3.2.1	真空中的麦克斯韦方程组	122
3.2.2	介质中的麦克斯韦方程组	125
3.2.3	介质的电磁性质方程与边值关系	126
3.2.4	洛伦兹力公式	127
3.3	电磁场的能量和能流	128
3.4	超导体的电磁性质	133
3.4.1	超导体的电磁性质	133
3.4.2	二流体模型	136
3.4.3	伦敦方程	136
	习题	139
第 4 章	电磁波的传播	141
4.1	电磁波的波动性	141
4.1.1	真空中电磁场的波动方程	141
4.1.2	赫兹实验	143
4.1.3	电磁波谱图	143
4.1.4	电磁波在介质中的传播	146
4.1.5	平面电磁波	149
4.1.6	电磁波的能量和能流	152
4.2	电磁波在介质界面上的反射和折射	155
4.2.1	反射和折射定律	155
4.2.2	菲涅耳公式	157
4.3	电磁波在导体中的传播	164
4.3.1	电磁波与导体相互作用的特点	165
4.3.2	导体中的电磁波方程	166
4.3.3	导体中的平面电磁波	167
4.3.4	趋肤效应和穿透深度	169

4.3.5	磁场与电场的关系	170
4.3.6	导体表面上的反射	171
4.4	电磁波在等离子体中的传播	175
4.5	电磁波在波导管内的传播	176
4.5.1	有界空间的电磁波	176
4.5.2	理想导体的边界条件	177
4.5.3	矩形波导中的电磁波	178
4.5.4	截止频率	180
4.5.5	TE ₁₀ 波的电磁场	182
4.6	谐振腔内的电磁波	185
4.7	相速度和群速度	187
4.7.1	相速度	187
4.7.2	群速度	188
4.8	左手材料的奇异电磁特性	189
4.8.1	左手材料的概念	189
4.8.2	左手材料的奇异电磁性质	191
4.8.3	左手材料的制备	194
4.8.4	左手材料的应用展望	196
	习题	197
第 5 章	电磁波的辐射	199
5.1	电磁场的矢势和标势	199
5.1.1	用势描述电磁场	199
5.1.2	规范变换和规范不变性	200
5.1.3	达朗贝尔方程	201
5.2	推迟势	205
5.2.1	达朗贝尔方程的解	205
5.2.2	推迟势	207
5.3	电偶极辐射	209
5.3.1	计算辐射场的一般公式	209
5.3.2	矢势的展开式	211
5.3.3	电偶极辐射	212
5.3.4	辐射能流、角分布、辐射功率	215
5.3.5	短天线的辐射、辐射电阻	215
5.3.6	磁偶极辐射	219
5.4	电磁场的动量	220
	习题	223
第 6 章	狭义相对论	224
6.1	伽利略相对性原理和伽利略变换	224
6.1.1	伽利略相对性原理	224

6.1.2	伽利略变换	224
6.1.3	经典力学的绝对时空观	226
6.2	狭义相对论的基本原理	228
6.2.1	狭义相对论的两个基本假设	228
6.2.2	间隔不变性	229
6.2.3	洛伦兹变换	229
6.3	相对论的时空理论	232
6.3.1	同时性的相对性	232
6.3.2	空间间隔的相对性	233
6.3.3	时间间隔的相对性	234
6.3.4	时序与因果律	237
6.3.5	相对论时空结构	238
6.3.6	相对论的速度变换	239
6.4	相对论理论的四维形式	240
6.4.1	洛伦兹变换的四维形式	240
6.4.2	四维协变量	242
6.5	电动力学的相对论不变性	246
6.5.1	四维电流密度矢量	246
6.5.2	四维势矢量	248
6.5.3	电磁场张量	249
6.5.4	\mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在洛伦兹变换下的变换性质	251
6.6	相对论力学	254
6.6.1	能量-动量四维矢量	254
6.6.2	相对论力学方程	259
6.6.3	洛伦兹力	260
	结束语: 经典电动力学的局限性	263
	习题	264
	参考文献	266

第0章 数学预备知识

电动力学的主要任务是计算电磁场的分布，需要用数学知识来描述电磁场的运动规律，本章介绍电动力学课程常用的数学知识，主要内容为矢量分析与场论基础及张量简介。

0.1 矢量的乘法

设有两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} ，它们在三个坐标轴上的分量分别是 (A_1, A_2, A_3) 和 (B_1, B_2, B_3) ，可以记为

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i\mathbf{e}_i \\ \mathbf{B} &= B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 B_i\mathbf{e}_i\end{aligned}\quad (0.1.1)$$

式中， \mathbf{e}_i 是对应坐标轴上的基矢。直角坐标系中， $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ ，球坐标系中，三个基矢为 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\phi$ 。

两个矢量的乘法包括点乘、叉乘和张量积三种。

0.1.1 矢量的点乘

两个矢量的点乘称为标量积，标量积是一个标量。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (0.1.2)$$

式中， A 、 B 分别表示矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的模，角度 θ 是矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 之间的夹角。两个矢量的标量积等于两个矢量的模相乘，再乘以两矢量夹角的余弦。矢量的点乘满足交换律、结合律和分配律。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{交换律}) \quad (0.1.3)$$

$$(m\mathbf{A}) \cdot (n\mathbf{B}) = mn\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{结合律}) \quad (0.1.4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{分配律}) \quad (0.1.5)$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (0.1.6)$$

0.1.2 矢量的叉乘

两个矢量的叉乘称为矢量积，矢量积是一个矢量。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{n} \quad (0.1.7)$$

矢量积的大小为 $AB \sin \theta$ ，刚好是一个以 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为邻边的平行四边形的面积，矢量积的方

向与两个矢量所在的平面垂直，与矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 成右手螺旋关系，如图 0-1 所示。式中， \mathbf{n} 表示从矢量 \mathbf{A} 转向矢量 \mathbf{B} 右手螺旋前进方向的单位矢量。

矢量积不满足交换律，但满足分配律

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (0.1.8)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (0.1.9)$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (0.1.10)$$

利用矢量的标量积与矢量积的定义可以得到两个很有用的公式。

1. 三矢量的混合积

三矢量的混合积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (0.1.11)$$

这个混合积是一个标量，其几何解释是一个以 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 为棱边的平行六面体的体积，如图 0-2 所示。很显然，这个体积也可以用 $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 和 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ 表示。三矢量的混合积对 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 具有轮换对称性质，即把三个矢量按循环次序轮换，其积不变。

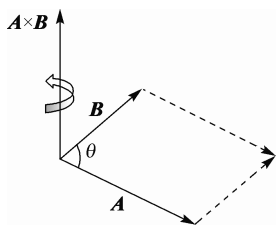


图 0-1 矢量的叉乘

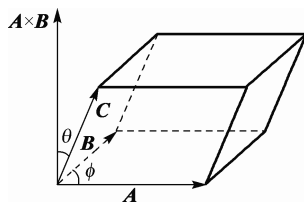


图 0-2 三矢量的混合积

如果只把其中两个矢量对调，其积相差一个负号。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (0.1.12)$$

2. 三矢量的矢量积

三矢量的矢量积即二重叉积，结果仍是一个矢量

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (0.1.13)$$

二重叉积的运算符号次序很重要，如：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \quad (0.1.14)$$

这是另一个与 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 完全不同的矢量。

0.1.3 矢量的张量积

两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 直接并列，中间没有任何运算符号，称为两个矢量的张量积，也称为并矢。

$$\mathcal{T} = \mathbf{AB} = \sum_{i=1, j=1}^3 A_i B_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (0.1.15)$$

\mathcal{T} 是一个二阶张量，关于张量的性质将在 0.7 节进行讨论。

0.2 标量场的梯度

一定物理量的空间分布称为场，例如，描述物质温度分布的温度场，描述流体速度分布的速度场，描述引力作用的引力场，描述电磁作用的电磁场等。如果这个物理量是标量，则称为标量场；如果这个物理量是矢量，则称为矢量场。例如，空间的温度、电磁学中的电势为标量场，电场强度、磁感应强度则是矢量场。为了定量研究标量场的空间分布特性，需要引入梯度的概念。

温度场描述的是空间各点的温度， $T(x, y, z)$ 是空间位置的函数，如果在这个标量场中，从某点出发经过 $d\mathbf{l}$ 之后，温度 T 的变化为

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

因为 $d\mathbf{l} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$ ，上式也可以写成点积形式

$$\begin{aligned} dT &= \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) \\ &= (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = |\nabla T| |d\mathbf{l}| \cos \theta \end{aligned} \quad (0.2.1)$$

式中

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (0.2.2)$$

∇T 称为温度场 T 的梯度，标量场的梯度是矢量。由式 (0.2.1) 可知，当 $d\mathbf{l}$ 沿 ∇T 方向时， $\theta = 0$ ，此时 dT 最大，因此， ∇T 的数值表示场函数 T 在该点的最大变化率， ∇T 的方向是场函数空间变化率最大的方向。标量场中数值相同的点构成等值面，即等值面的法线方向。 ∇ 是带有单位矢量的微分算符，只有作用于右方函数时才有意义。 ∇ 算符有两方面的作用，既具有方向性，又具有微分算符的性质。

在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.2.3)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (0.2.4)$$

在柱坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.2.5)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (0.2.6)$$

在球坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (0.2.7)$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (0.2.8)$$

0.3 矢量场的散度和散度定理

0.3.1 矢量场的散度

为了定量研究矢量场的空间分布特性, 需要引入散度和旋度的概念。

首先引入矢量场中通量的概念, 对于一个矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$, 通过空间某一曲面的通量为矢量场对该曲面的面积分, 表达式为

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.3.1)$$

式中, $d\mathbf{S}$ 为曲面在点 $P(x, y, z)$ 处的微分面元。若曲面为封闭曲面, 所围体积为 V , 则矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 通过该闭合曲面的通量为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.3.2)$$

对于闭合曲面而言, 曲面的法向一般是指向闭合曲面的外部, 因而流出该曲面的通量为正。对不同的矢量场, 通量的物理意义不同, 对电场强度 $\mathbf{E}(x, y, z)$, 电通量为

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

表示穿出闭合曲面 S 的电场线总数。矢量场的通量描述了某一空间范围内场线的发散和汇聚情况。

为了细致刻画矢量场中每一点的发散情况, 引入单位体积的通量的极限

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (0.3.3)$$

式中, ΔV 为曲面 S 所包围的体积。式 (0.3.3) 表示矢量场 \mathbf{F} 在该点附近通过包围单位体积的封闭曲面的通量, 它与曲面的形状无关, 称为矢量场 \mathbf{F} 在该点的散度, 矢量场的散度是标量。如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$, 称为有源场; $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 称为无源场; $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$, 称这个场有“漏”或“汇”。下面给出矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在不同坐标系中散度的表示式。

在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (0.3.4)$$

在柱坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (0.3.5)$$

在球坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (0.3.6)$$

0.3.2 散度定理

利用矢量场散度的定义, 由式 (0.3.3) 可以得到

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (0.3.7)$$

式 (0.3.7) 表明, 矢量场 \mathbf{F} 通过任意封闭曲面 S 的通量等于它所包围的体积 V 内的散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 的体积分, 称为高斯散度定理。利用此定理可将体积分与面积积分互换。

0.4 矢量场的旋度和斯托克斯定理

0.4.1 矢量场的旋度

首先引入矢量场的环流量概念: 矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 沿任一封闭曲线的线积分称为该矢量场的环流量。

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (0.4.1)$$

在场论中用环流量来描述矢量场的涡旋特性, 但环流量的大小与曲线 L 所包围的面积有关, 为了细微刻画矢量场中任意点处涡旋的性质, 引入单位面积环流量的极限

$$(\nabla \times \mathbf{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (0.4.2)$$

式 (0.4.2) 表示矢量场 \mathbf{F} 沿法向方向的涡旋量, 称为矢量场 \mathbf{F} 在该点的旋度的法向分量。式中, ΔS 为闭合曲线所包围的面积, \mathbf{n} 为 ΔS 的正法线方向。

矢量场 \mathbf{F} 的旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 仍是矢量, 表示矢量场 \mathbf{F} 在该点的最大涡旋量的方向和数值。如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$, 称为有旋场, 有旋场的场线是闭合曲线; $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 称为无旋场。

下面给出矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在不同坐标系中旋度的表示式。

在直角坐标系中

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (0.4.3)$$

在柱坐标系中

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \quad (0.4.4)$$

在球坐标系中

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(F_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (0.4.5)$$

0.4.2 斯托克斯定理

利用矢量场旋度的定义，由式 (0.4.2) 可以得到

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.4.6)$$

式 (0.4.6) 表明，矢量场 \mathbf{F} 沿任一封闭曲线的环流等于其旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 对以该曲线所围面积的面积分，称为斯托克斯定理。利用此定理可将面积积分与曲线积分互换。

0.5 亥姆霍兹定理

一个矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 按照其散度和旋度的取值情况，可以分为以下两类。

第一类为无旋场，满足这类矢量场的条件为

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (0.5.1)$$

无旋场可以用一个标量场的梯度来表示为

$$\mathbf{A} = \nabla \varphi \quad (0.5.2)$$

无旋场又称为纵场。静电场就是无旋场。

第二类矢量场是无源场，满足这类矢量场的条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (0.5.3)$$

无源场可以用另一个矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的旋度来表示

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (0.5.4)$$

无源场也称为横场。恒定磁场就是无源场。

根据无旋场和无源场的定义，可以得到以下两个恒等式。

(1) 任何标量场的梯度均为无旋场

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0 \quad (0.5.5)$$

(2) 任何矢量场的旋度均为无源场

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0 \quad (0.5.6)$$

一般的矢量场并不都是单纯的横场或纵场，其旋度和散度都可以不为零，因此，要确定矢量场的性质，需要同时知道其旋度和散度，不能任凭其中之一来确定矢量场的性质。同时还要注意，知道了散度和旋度，仅仅能确定矢量场函数满足的微分方程，要得到微分方程的唯一解，即确定矢量场的性质，还必须要有适当的边界条件。

下面给出确定矢量场性质的亥姆霍兹定理。

(1) 在无界区域中，一个矢量场可由该场在各处的散度值和旋度值，以及假定在无穷远处该场的散度值和旋度值为零的条件所决定。

(2) 在有界区域中，要确定一个矢量场，除场在区域内各处的散度值和旋度值外，还必须要知道场在边界面上的法线分量值。

0.6 ∇ 算符对函数的运算

0.6.1 ∇ 算符的一般运算规则

在电磁场理论中，经常用到 ∇ 算符的运算，在场论中， ∇ 算符具有三种作用方式：

- (1) 作用在标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 上， $\nabla\varphi$ 表示标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的梯度；
- (2) 通过点乘形式作用在矢量函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 上， $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 表示矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的散度；
- (3) 通过叉乘形式作用在矢量函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 上， $\nabla \times \mathbf{F}$ 表示矢量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 的旋度。

在直角坐标系中， ∇ 算符定义为

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.6.1)$$

∇ 算符具有两个基本性质，既具有矢量的性质，又是微分算符。将它作用于场量进行运算时，既要注意它的微分作用，又要考虑它的矢量性。需要注意的是， ∇ 算符的微分只对其右方的物理量作用，与物理量之间的顺序不能随意调换。例如， $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 是 \mathbf{F} 的散度，而 $\mathbf{F} \cdot \nabla$ 只是一个标量微分算符，即

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} + F_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.6.2)$$

可以证明， ∇ 算符的运算公式如下，式中， ϕ 、 ψ 为标量场， \mathbf{f} 、 \mathbf{g} 表示矢量场。

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \quad (0.6.3)$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{f}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{f} + \phi\nabla \cdot \mathbf{f} \quad (0.6.4)$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{f}) = \nabla\phi \times \mathbf{f} + \phi\nabla \times \mathbf{f} \quad (0.6.5)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) \quad (0.6.6)$$

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} \quad (0.6.7)$$

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} \quad (0.6.8)$$

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \quad (0.6.9)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f} \quad (0.6.10)$$

式(0.6.3)用到了 ∇ 算符的微分性质，与对两个标量函数做微分运算的公式一致。

式(0.6.4)和式(0.6.5)， ∇ 算符求微分性质既要作用在标量 ϕ 上，又要作用在矢量 \mathbf{f} 上，同时考虑到 ∇ 的矢量性质，点乘必须放在正确的位置上，例如， $(\nabla \cdot \phi)\mathbf{f}$ 没有意义，必须写成 $\nabla\phi \cdot \mathbf{f}$ 。

式(0.6.6)，从微分运算看，既要作用在 \mathbf{f} 上，又要对 \mathbf{g} 作用，所以应该有两项。该式相当于三矢量的混合积，用到混合积的运算法则。证明如下：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \nabla_{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_{\mathbf{g}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \\ &= (\nabla_{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla_{\mathbf{g}} \times \mathbf{g}) \\ &= (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) \end{aligned}$$

式 (0.6.7) 与式 (0.6.6) 证明方法类似, 需要用到两次叉乘公式和算符 ∇ 的微分性质。式 (0.6.8) 的 ∇ 算符需对 \mathbf{f} 和 \mathbf{g} 作用, 再利用三矢量叉乘公式, 可以得到最后结果。

式 (0.6.9) 和式 (0.6.10) 中, ∇^2 为拉普拉斯算符, 在直角坐标系下表示为

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (0.6.11)$$

0.6.2 ∇ 算符的其他常用公式

1. ∇ 算符对复合函数的作用

如某标量函数 $\phi(u)$, 且 $u = u(x, y, z)$, 则有

$$\begin{aligned}\nabla \phi(u) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi(u)}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi(u)}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi(u)}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi \partial u}{\partial u \partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi \partial u}{\partial u \partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi \partial u}{\partial u \partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \nabla u\end{aligned}\quad (0.6.12)$$

同理可得

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(u) = \nabla u \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \quad (0.6.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{f}(u) = \nabla u \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \quad (0.6.14)$$

2. ∇ 算符对 R 及 R 的作用

这里给定 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + (z - z')\mathbf{e}_z$

$$\begin{aligned}R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ \nabla R &= \mathbf{e}_x \frac{\partial R}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial R}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{(x - x')}{R} \mathbf{e}_x + \frac{(y - y')}{R} \mathbf{e}_y + \frac{(z - z')}{R} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mathbf{R}}{R}\end{aligned}\quad (0.6.15)$$

一般情况下, 有

$$\nabla R^n = nR^{n-2} \mathbf{R} \quad (0.6.16)$$

如果考虑算符 ∇' 作用在 R 上, 有以下规律

$$\begin{aligned}\nabla' R &= \frac{\partial R}{\partial x'} \mathbf{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y'} \mathbf{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z'} \mathbf{e}_z = -\frac{(x - x')}{R} \mathbf{e}_x - \frac{(y - y')}{R} \mathbf{e}_y - \frac{(z - z')}{R} \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\mathbf{R}}{R}\end{aligned}\quad (0.6.17)$$

于是, 有

$$\nabla' R = -\nabla R \quad (0.6.18)$$

同时还可以得到如下公式

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = 3 \quad (0.6.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = 0 \quad (0.6.20)$$

【例 0-1】 证明 $\oint_l (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2 \int_S \mathbf{m} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 \mathbf{m} 为常矢量, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 。

证明: 根据斯托克斯定理 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, 取 $\mathbf{A} = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$, 可以得到

$$\oint_l (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

根据式 (0.6.7) 可得

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{m} + (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{r} \\ &= \mathbf{0} + 3\mathbf{m} - \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{r} - \mathbf{0} \\ &= 3\mathbf{m} - (m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y + m_z \mathbf{e}_z) \\ &= 3\mathbf{m} - \mathbf{m} = 2\mathbf{m} \end{aligned}$$

所以有

$$\oint_l (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 2 \int_S \mathbf{m} \cdot d\mathbf{S} \quad (0.6.21)$$

【例 0-2】 证明 $\nabla \left(\frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{M}_0 r^2 - 3\mathbf{r}(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5}$, 其中 \mathbf{M}_0 为常矢量, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 。

证明: 左边的式子满足

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \left(\mathbf{M}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

根据式 (0.6.8) 可得

$$\nabla \left(\mathbf{M}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{M}_0 \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{M}_0) + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{M}_0$$

由于 \mathbf{M}_0 为常矢量, 可以得到以下结果

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{M}_0) = 0, \quad \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{M}_0 = 0$$

又因为 $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, 于是可得

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \times \left(-\nabla \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (0.6.22)$$

所以得到以下的关系

$$\nabla \left(\mathbf{M}_0 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

因为

$$(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = M_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + M_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + M_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

而

$$\begin{aligned} M_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= M_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = M_{0x} \left[\mathbf{e}_x r^{-3} + \mathbf{r} \left(-\frac{3}{2} r^{-5} \cdot 2x \right) \right] \\ &= \frac{M_{0x}}{r^3} \mathbf{e}_x - \frac{3rM_{0x}x}{r^5} \end{aligned}$$

同理可以得到

$$\begin{aligned} M_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \frac{M_{0y}}{r^3} \mathbf{e}_y - \frac{3rM_{0y}y}{r^5} \\ M_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \frac{M_{0z}}{r^3} \mathbf{e}_z - \frac{3rM_{0z}z}{r^5} \end{aligned}$$

所以合并可以得到

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{M}_0 r^2 - 3\mathbf{r}(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \quad (0.6.23)$$

0.7 张 量 简 介

0.7.1 张量的概念

在 0.1 节介绍过，两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 并列，它们之间不做任何运算，称为两个矢量的并矢或张量积，记为 \mathbf{AB} ，设直角坐标系的单位基矢量为 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 ，则并矢 \mathbf{AB} 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)(B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3) \\ &= A_1B_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A_1B_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + A_1B_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ &\quad + A_2B_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + A_2B_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + A_2B_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + A_3B_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + A_3B_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + A_3B_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (0.7.1)$$

一般来说， $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 。

在直角坐标系中，并矢有 9 个分量。

$$\begin{array}{ccc} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{array} \quad (0.7.2)$$

可以将 9 个分量写为

$$\begin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}$$

在三维空间中，具有 9 个分量的物理量称为二阶张量，并矢是二阶张量的一种特殊情形。

一般二阶张量可以写为

$$\mathcal{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (0.7.3)$$

因此, 并矢 $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 可以作为二阶张量的 9 个基, 一般二阶张量在这 9 个基上的分量就是 T_{ij} 。通常可将标量称为零阶张量, 将矢量称为一阶张量。

下面通过讨论弹性体的应力来说明张量的具体含义。当弹性体受到外力时, 它内部的分子之间存在着相当复杂的作用力, 内部相邻两部分之间的相互作用力, 称为内应力。在宏观描述中, 此内应力可用以下方式表示: 如图 0-3 所示, 在弹性体内, 取任一微小的四面体, 其斜面为任意面元 $d\sigma$, 假想有一 P 点通过该面元, 它两面的物质受到大小相等而方向相反的力, 用 $d\mathbf{f}$ 表示 $d\sigma$ 前方的物质通过此面元对后方物质的作用力。另三个面各为 $d\sigma_x$ 、 $d\sigma_y$ 、 $d\sigma_z$, 方向分别沿三个坐标轴, 其大小各为 $d\sigma_x = d\sigma_x \cdot \mathbf{e}_x$ 、 $d\sigma_y = d\sigma_y \cdot \mathbf{e}_y$ 、 $d\sigma_z = d\sigma_z \cdot \mathbf{e}_z$ 。相应的作用力分别是 $d\mathbf{f}_x$ 、 $d\mathbf{f}_y$ 、 $d\mathbf{f}_z$ 。

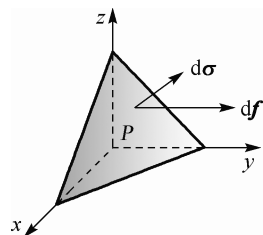


图 0-3 弹性体的应力

以四面体为研究对象, 此时四面体内物质所受的合力为 $d\mathbf{f} - d\mathbf{f}_x - d\mathbf{f}_y - d\mathbf{f}_z$, 由于四面体处于力学平衡状态, 则有

$$d\mathbf{f} - d\mathbf{f}_x - d\mathbf{f}_y - d\mathbf{f}_z = 0 \quad (0.7.4)$$

令 $d\sigma_x$ 上应力 $d\mathbf{f}_x$ 的 x 、 y 、 z 分量分别为 $d f_{xx}$ 、 $d f_{xy}$ 、 $d f_{xz}$ 。并考虑到 $d\mathbf{f}_x$ 的大小与 $d\sigma_x$ 大小成正比, 则有

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_x &= d f_{xx} \mathbf{e}_x + d f_{xy} \mathbf{e}_y + d f_{xz} \mathbf{e}_z = d\sigma_x (T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z) \\ d\mathbf{f}_y &= d\sigma_y (T_{yx} \mathbf{e}_x + T_{yy} \mathbf{e}_y + T_{yz} \mathbf{e}_z) \\ d\mathbf{f}_z &= d\sigma_z (T_{zx} \mathbf{e}_x + T_{zy} \mathbf{e}_y + T_{zz} \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (0.7.5)$$

式中, T_{xy} 表示通过方向沿 x 轴的单位面积, 其前方物质对后方物质作用力的 y 分量, 其余类推。利用前面诸关系式可得

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= d\sigma \cdot \mathbf{e}_x (T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{xy} \mathbf{e}_y + T_{xz} \mathbf{e}_z) + d\sigma \cdot \mathbf{e}_y (T_{yx} \mathbf{e}_x + T_{yy} \mathbf{e}_y + T_{yz} \mathbf{e}_z) \\ &\quad + d\sigma \cdot \mathbf{e}_z (T_{zx} \mathbf{e}_x + T_{zy} \mathbf{e}_y + T_{zz} \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (0.7.6)$$

引入 $\mathcal{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 并规定矢量从左边点乘 \mathcal{T} 是点乘 \mathcal{T} 中第一个单位矢量, 则

$$d\mathbf{f} = d\sigma \cdot \mathcal{T} \quad (0.7.7)$$

这里引入的 \mathcal{T} 就是一个张量, 其分量是 T_{ij} , 它的第一个下标表示考虑应力的某个面的方向, 第二个下标表示应力的某一分量。对方向沿 x 轴的面来说, T_{xx} 描述法线应力, 即张应力, 而 T_{xy} 、 T_{xz} 描述切线应力, 即切应力, 其余类推。

如果 T_{ij} 所包含的 9 个量已知, 则对任意方向的 $d\sigma$ 所对应的 $d\mathbf{f}$ 都可求出, 于是 P 点处的应力情况就完全清楚了。因此, 将 \mathcal{T} (或 T_{ij}) 称为应力张量, 后来把其他具有 T_{ij} 性质的量都称为张量, 就是因为它最先是在讨论张力时引入的。

0.7.2 张量的主要性质

(1) 如果 $T_{ij} = T_{ji}$ ，则称此张量为对称张量，其矩阵形式为对称矩阵，它具有 6 个独立分量。

(2) 如果 $T_{ij} = -T_{ji}$ ，则称此张量为反对称张量，其矩阵形式为反对称矩阵，反对称张量的对角元素均为零，它只有三个独立分量。

(3) $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ 称为单位张量，其分量是 $I_{ij} = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ ，当 $i \neq j$ 时； $\delta_{ij} = 1$ ，当 $i = j$ 时)，单位张量与任意矢量的点乘等于该矢量。

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{f} \quad (0.7.8)$$

0.7.3 张量的运算

1. 张量的加、减法

设两个二阶张量 $\mathcal{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 和 $\mathcal{D} = \sum_{i,j} D_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ，则

$$\mathcal{T} \pm \mathcal{D} = \sum_{i,j} (T_{ij} \pm D_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (0.7.9)$$

张量加、减法运算只能在同阶张量之间进行，两个同阶张量相加、减，只需将各个对应分量相加、减。

2. 张量的乘法

(1) 标量与张量相乘

$$\varphi \mathcal{T} = \sum_{i,j} (\varphi T_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (0.7.10)$$

(2) 矢量与张量点乘

$$\mathbf{f} \cdot \mathcal{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} T_{ij} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j \quad (0.7.11)$$

运算结果是一个矢量。

若 $\mathcal{T} = \mathbf{AB}$ ，

$$\mathbf{f} \cdot \mathcal{T} = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} \quad (0.7.12)$$

而

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{f}) \quad (0.7.13)$$

显然在一般情况下

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{f} \neq \mathbf{f} \cdot \mathcal{T} \quad (0.7.14)$$

只有当 \mathcal{T} 为对称张量时，式 (0.7.14) 两边才相等，若为反对称张量， $\mathcal{T} \cdot \mathbf{f} = -\mathbf{f} \cdot \mathcal{T}$ 。

(3) 矢量与张量叉乘

$$\mathbf{f} \times \mathcal{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{f} \times (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} T_{ij} (\mathbf{f} \times \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j \quad (0.7.15)$$

运算结果是一个二阶张量。若 $\mathcal{T} = \mathbf{AB}$ ，则 $\mathbf{f} \times (\mathbf{AB}) = (\mathbf{f} \times \mathbf{A}) \mathbf{B}$ 。

显然一般情况下

$$\mathcal{F} \times \mathbf{f} \neq \mathbf{f} \times \mathcal{F} \quad (0.7.16)$$

另外, 两个张量还有一次点乘和二次点乘运算, 这里不再讨论。

习 题

0.1 根据算符 ∇ 的微分性与矢量性, 推导下列公式:

$$(1) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B};$$

$$(2) \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}.$$

0.2 设 u 是空间坐标 x 、 y 、 z 的函数, 证明:

$$(1) \nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u;$$

$$(2) \nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du};$$

$$(3) \nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}.$$

0.3 设 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 为源点 \mathbf{r}' 到场点 \mathbf{r} 的距离, \mathbf{R} 的方向规定为从源点指向场点。

(1) 证明下列结果:

$$\textcircled{1} \nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R};$$

$$\textcircled{2} \nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3};$$

$$\textcircled{3} \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0;$$

$$\textcircled{4} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0 \quad (R \neq 0).$$

(2) \mathbf{a} 、 \mathbf{k} 及 \mathbf{E}_0 均为常矢量, 求:

$$\textcircled{1} \nabla \cdot \mathbf{R};$$

$$\textcircled{2} \nabla \times \mathbf{R};$$

$$\textcircled{3} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{R};$$

$$\textcircled{4} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R});$$

$$\textcircled{5} \nabla \cdot \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}};$$

$$\textcircled{6} \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}.$$

0.4 若 \mathbf{m} 是常矢量, 证明除 $R=0$ 点以外, 矢量 $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$ 的梯度的负值, 即

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi \quad (R \neq 0)$$

式中, R 为坐标原点到场点的距离, 方向由原点指向场点。

第 1 章 静 电 场

静电场是静止电荷所产生的不随时间变化的电场，因此静电现象所涉及的电荷和场的分布与时间无关。

本章主要内容：静电场的基本规律和求解静电场分布的几种方法。

讲授思路：从库仑定律出发，通过静电场方程的积分形式，建立静电场方程的微分形式，引入电势及其微分方程，介绍几种求解静电场的方法。

1.1 真空中的静电场方程

1.1.1 库仑定律和电场强度

1. 库仑定律

库仑定律是描述宏观电磁现象的三大实验定律之一，它表述为真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 F

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0|r-r'|^3}(r-r') \quad (1.1.1)$$

式中， r 为由坐标原点到 Q' 的矢径， r' 为由坐标原点到 Q 的矢径， ϵ_0 为真空电容率（真空中的介电常数）。

库仑定律揭示了静电力的三个突出特点：

- (1) 相对静止的两个点电荷的作用力的大小符合平方反比律；
- (2) 力的方向沿着两个点电荷的中心连线，是一种有心力；
- (3) 库仑力满足矢量叠加原理，力的叠加原理和静电学方程是以线性方程相联系的。

2. 电场强度

库仑定律只从现象上给出了作用力的大小和方向，并没有解决作用力的物理本质，即静电力是如何作用的。历史上有两种观点。

- (1) 点电荷 Q 直接把作用力施加于点电荷 Q' 上，称为超距作用。
- (2) 点电荷 Q 在空间激发电场， Q' 受到的作用力是电场存在的一种表现形式，即使 Q' 不存在， Q 激发的电场也是存在的，就是说 Q 在空间产生电场，电场再与 Q' 发生作用，这是场的观点。

从场的观点看，超距作用相当于 Q 产生的电场作用于 Q' 不需要时间，也即电荷之间相互作用的传递速度是无穷大。若仅局限于静电的情况，两种观点是等价的，但在运动电荷的情况下，两种观点显示出不同的物理内容，实践证明，场的观点是正确的。

3. 用场的观点讨论库仑定律

对电荷有作用力是电场的特征性质，用场的观点对库仑定律的理解是描述一个静止电荷

激发的电场与其他任何点电荷的作用力。

$$\mathbf{F} = Q'\mathbf{E} \quad (1.1.2)$$

点电荷 Q 激发的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.3)$$

库仑力 \mathbf{F} 满足矢量叠加原理，同样，电场强度 \mathbf{E} 也满足矢量叠加原理。

对点电荷系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i) \quad (1.1.4)$$

在电荷连续分布的情况下，如图 1-1 所示。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.5)$$

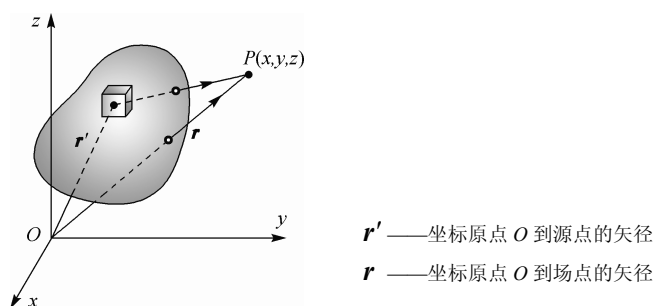


图 1-1 连续分布电荷的电场

为了反映相互作用在场中的传递特点，还必须研究一个电荷和它邻近的电荷是如何相互作用的，一点上的电场和它邻近的电场是如何联系的，需要找出静电场规律的微分形式。

1.1.2 静电场的散度

1. 高斯定理的微分形式

在真空中静电场的高斯定理：通过任一闭合曲面 S 的电通量等于该封闭曲面所包围的电荷电量的代数和除以 ϵ_0 ，而与闭合曲面外的电荷无关。

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (1.1.6)$$

如果包围在封闭曲面内的电荷是连续分布的，其体密度为 ρ ，则闭合曲面内的总电荷为

$$Q = \int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (1.1.7)$$

这是高斯定理的积分形式（场与电荷的积分形式）。

为了求出电荷与电场的局域关系，即电场中一点与邻近一点的相互作用，通过高斯定理的积分形式，利用高斯散度定理可得到高斯定理的微分形式（场与电荷的微分关系）。

利用高斯散度定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV \quad (1.1.8)$$

由式（1.1.8）则有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1.9)$$

这是高斯定理的微分形式，是静电场的基本微分方程之一，反映了静电场的性质，静电场是有源场，电荷是电场的源，电场线从正电荷发出而终止于负电荷。

当 ρ 为正时， $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$ ，说明该点有“源”。

当 ρ 为负时， $\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$ ，说明该点有“漏”。

当 $\rho = 0$ 时， $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，电场线没有发出，也没有终止，可连续通过。

2. 静电场散度方程的局域性质

由式（1.1.9）可知，空间某处静电场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 只和该点上的电荷密度有关，而和其他点的电荷分布无关。并不说明某点的电场强度 \mathbf{E} 与其他电荷分布无关。

讨论题：如果库仑力不是与 r^2 成反比，而是与 r^3 成反比，电场线在无电荷时是否不中断？由此结论可以说明什么？

证明：如果高斯定理不成立，则电场线在无电荷处就可能中断。高斯定理来源于库仑定律，如果库仑定律中静电力不符合平方反比定律，那么高斯定理就不成立。因此只要证明如果静电力不是与 r^2 成反比，而是与 r^3 成反比，则问题得证。

假设点电荷在坐标原点处，其激发的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4} \mathbf{r}$$

由高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$ ，如图 1-2 所示，通过闭合球面 S_1 的电通

量为

$$\Phi_1 = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} 4\pi r_1^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 r_1}$$

同理，通过 S_2 面的电通量为

$$\Phi_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 r_2}$$

由于， $r_2 > r_1$ ，则有 $\Phi_2 < \Phi_1$ 。

说明有些电场线在 S_1 和 S_2 之间中断了，但该处并无电荷存在。可见，电场线在无电荷处不中断是来源于高斯定理，实质上是库仑定律的推论，说明散度方程与静电力符合平方反比律有关。

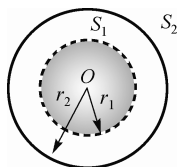


图 1-2 包围点电荷的闭合球面

1.1.3 静电场的旋度

静电场是一个矢量场，由矢量场论知道，要确定一个矢量场，只知道矢量场的散度是不能完全确定该矢量场的性质的，要完全确定静电场的性质，还需要给出其旋度。

静电场的散度是从静电场的高斯定理经积分变换得到的，可以联想到，静电场的旋度可以从静电场的另一基本定理得出。

静电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.1.10)$$

表示静电场力做功与路径无关。

利用斯托克斯定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

由于积分曲面 S 是任意的，则有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.11)$$

这是静电场环路定理的微分形式，是静电场的另一个基本方程。静电场的旋度为零，说明了静电场的无旋性，静电场的电场线分布呈无涡旋状结构。

无旋性仅在静电场情况下成立，在一般情况下，电场是有旋的（以后将讨论这个问题）。

1.1.4 真空中的静电场方程

真空中静电场的基本方程

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

因为是微分方程，所以也称为静电场方程的微分形式，静电场方程反映了静电场的基本性质，静电场是有源无旋场，源就是电荷。

【例 1-1】 电荷 Q 均匀分布于半径为 a 的球体内，求各点的电场强度，并计算电场强度的散度和旋度。

解：（1）先求电场强度 \mathbf{E}

设电荷 Q 位于坐标原点，电场强度由高斯定理求得，由于球对称分布，高斯面上各点电场强度的大小 E 相同。

球外 ($r > a$)，由高斯定理

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \end{aligned}$$

球内 ($r < a$)，高斯面内所包围的电荷为

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{Qr^3}{a^3}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 a^3}$$

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

(2) 求 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 和 $\nabla \times \mathbf{E}$

当 $r > a$ 时,
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

由于 $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ ($r \neq 0$), 则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

由于 $\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ ($r \neq 0$), 则有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

当 $r < a$ 时,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \mathbf{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, 又 $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$, 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \mathbf{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

由于 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ ($r \neq 0$), 则有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

本例题的结论:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (r > a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (r < a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

讨论解的物理意义

(1) 不论球内、球外, 皆有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 因为 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 是静电场的普遍规律。

(2) 在球内, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, 球外, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 这说明 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的局域性质, 即某点 \mathbf{E} 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 只与该点的 ρ 有关。在球外, 虽然通过一包围电荷的封闭面的电通量不为零, 但球外 $\rho = 0$, 则 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。

(3) 这个例题是对静电场方程的一个验证, 静电场方程是任何静电场都必须遵守的基本定律。

1.2 电介质中的静电场方程

1.2.1 电介质的极化

1. 电介质的结构

电介质是由分子组成的, 分子是由带正电的原子和绕核运动的带负电的电子组成的, 所以说电介质是一个带电的粒子系统, 其内部存在着不规则的而又迅速变化的微观电磁场。

在研究宏观电磁现象时, 我们所讨论的物理量是一个包含大量分子的物理小体积的平均值, 此平均值称为宏观物理量。

电介质中的分子分为两类, 无极分子(非极性分子)和有极分子(极性分子)。无极分子的正电中心和负电中心相重合, 没有分子电偶极矩, 如图 1-3(a)所示。有极分子的正电中心和负电中心不相重合, 有分子电偶极矩, 如图 1-3(c)所示。

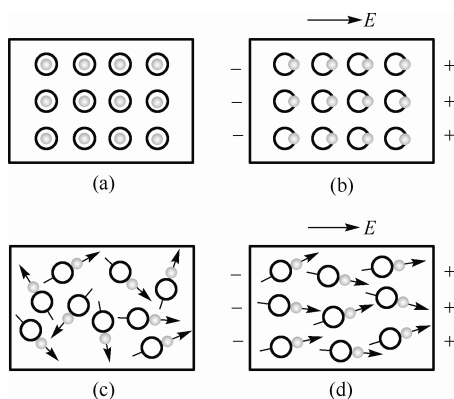


图 1-3 电介质中的分子

无外电场时:

(1) 无极分子正、负电中心重合, 无分子电偶极矩。

(2) 有极分子有分子电偶极矩, 但由于大量分子做无规则运动, 取向混乱, 在物体小体积 ΔV 内的分子电偶极矩的矢量和为零, 即 $\sum_i \mathbf{p}_i = 0$ 。

外电场作用下:

(1) 无极分子的正、负电中心被拉开, 如图 1-3(b)所示, 分子电偶极矩的矢量和不为零, 即 $\sum_i \mathbf{p}_i \neq 0$ 。

(2) 如图 1-3(d)所示, 有极分子的电偶极矩平均有一定的取向, 矢量和不为零, 即 $\sum_i \mathbf{p}_i \neq 0$ 。

在外电场作用下，介质内都出现了宏观的电偶极矩分布，因而介质表面或内部出现极化电荷（又称为束缚电荷）。在外电场作用下，介质内部及表面出现宏观电荷分布的现象称为介质的极化。无极分子的极化在于正、负电荷中心的相对位移，称为位移极化。有极分子的极化是分子的电偶极矩转向电场的方向，称为取向极化。

2. 电极化强度矢量

为了描述宏观电偶极矩的分布，引入电极化强度矢量 \mathbf{P}

$$\text{定义} \quad \mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (1.2.1)$$

它等于物理小体积 ΔV 内的分子电偶极矩的矢量和与 ΔV 之比，即单位体积内分子电偶极矩的矢量和。 \mathbf{p}_i 表示第 i 个分子的电偶极矩。 \sum_i 表示对 ΔV 内所有分子求和。

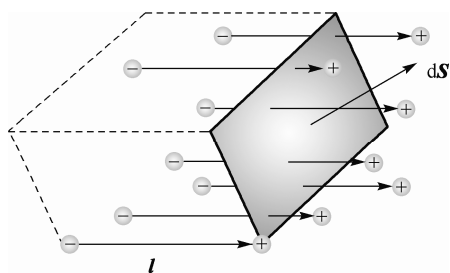
3. 电极化强度矢量与极化电荷体密度的关系

在外电场作用下，由于极化使无极分子正、负电中心发生相对位移，有极分子的分子电偶极矩有一定取向，因而物理小体积 ΔV 内可能出现净余的正电荷和负电荷，即出现宏观的极化电荷分布。现在来求出电极化强度矢量 \mathbf{P} 与极化电荷体密度 ρ_p 之间的关系。

用一个简化的模型来描述介质中的分子。设每个分子由相距为 l 的一对正、负电荷 $\pm q$ 构成。分子电偶极矩为 $\mathbf{p} = ql$ 。

如图 1-4 所示，在介质内某曲面 S 上取一个面元 dS ，介质极化后，当偶极子的负电荷位于体积元 $dV = l \cdot dS$ 内时，同一偶极子的正电荷一定穿出 dS 。

设单位体积内的分子数为 n ，穿出 dS 外面的正电荷为 $dQ_p = nql \cdot dS$ （实际上是体积内的负电荷数）



$$nql \cdot dS = np \cdot dS = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{其中, } \mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} = n\mathbf{p}.$$

对任意体积 V 内通过界面穿出去的正电荷为

$$Q_p = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

图 1-4 电极化强度矢量与极化电荷体密度的关系

由于介质是电中性的，所以极化体积内剩余的负电荷也等于这个量。

$$Q'_p = -Q_p$$

用 ρ_p 表示由于极化而出现的极化电荷体密度，则体积内极化电荷为

$$\int_V \rho_p dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.2)$$

注意式 (1.2.2) 中的负号，当体积内负电荷增加，正电荷穿出时，极化电荷带负电。此时， $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} > 0$ ($\cos\theta > 0$ 、 n 、 q 、 dS 为正)，必须加“ $-$ ”。

当体积内正电荷增加，负电荷穿出时，极化电荷带正电。此时， $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} < 0$ （因为 \mathbf{P} 由 $\ominus \rightarrow$

⊕, $\cos\theta < 0$), 必须加“-”, 保证 $\int_V \rho_p \cdot dV > 0$ 。

式(1.2.2)是电极化强度矢量 \mathbf{P} 与极化电荷体密度 ρ_p 的积分关系, 下面求微分关系。

利用高斯散度定理 $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV$, 由于积分体积 V 是任意的

$$\text{则有} \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)表示极化电荷体密度决定于电极化矢量强度 \mathbf{P} 的散度。

电偶极矩的方向如图 1-5 所示。

所以电极化强度矢量 \mathbf{P} 的源必是负的极化电荷。 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, $\rho_p = 0$, 无源处没有极化电荷。

介质内某点, $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, 则该点的 $\rho_p = 0$ 。若介质内各点均满

足 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, 则介质内部不出现极化电荷体分布。

若介质均匀极化, $\mathbf{P} = \text{常量}$, $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, 体内无极化电荷, 极化电荷只出现在自由电荷附近及介质界面处。

若介质非均匀极化, 除了界面处和自由电荷附近有极化电荷外, 介质内部还会出现极化电荷体分布。

真空可以视为电介质的特例, 在电动力学中, 认为真空中各点 $\mathbf{P} = 0$ 。

4. 电极化强度矢量与极化电荷面密度的关系

为了讨论两种介质分界面上极化电荷面密度 σ_p 与电极化强度矢量 \mathbf{P} 的关系, 如图 1-6 所示, 在两种介质的分界面上取一个面元 $d\mathbf{S}$, 在 $d\mathbf{S}$ 两侧取一定厚度的薄层, 使分界面包含在薄层内, 在薄层内出现的极化电荷与 $d\mathbf{S}$ 之比, 当薄层厚度趋于零的极限, 称为分界面上的极化电荷面密度, 以 σ_p 表示。

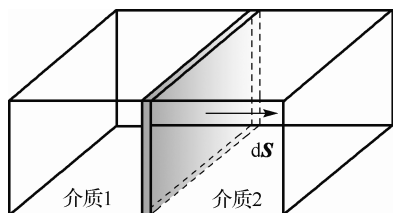


图 1-6 电极化矢量强度与极化电荷面密度的关系

$$\sigma_p = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{薄层内极化电荷}}{d\mathbf{S}}$$

从介质 1 进入薄层的正电荷为 $\mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S}$, 从薄层出来进入介质 2 的正电荷为 $\mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S}$, 薄层内出现的净余电荷为 $-(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$ 。

$$\sigma_p d\mathbf{S} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{则可得到} \quad \sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1.2.4)$$

式(1.2.4)中 \mathbf{n} 为分界面上由介质 1 指向介质 2 的法向方向的单位矢量。由式(1.2.4)可知, 两种介质分界面上的极化电荷面分布与两种介质的电极化强度矢量有关。

由以上推导可知, 所谓面极化电荷, 不是真正分布在一个几何面上的电荷, 而是在一个含有相当多分子层的薄层内的效应。

1.2.2 介质中的静电场方程

当电场中有介质时, 电场引起介质极化, 产生极化电荷, 极化电荷和自由电荷一样, 也会激发电场。建立介质中的静电场方程, 只要将真空中静电场方程中激发电场的场源电荷由自由电荷扩展为自由电荷与极化电荷共同激发即可。

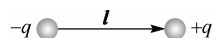


图 1-5 电偶极矩的方向

在介质中，自由电荷和极化电荷共同激发电场。静电场方程可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0} \quad (1.2.5)$$

实际问题中，自由电荷体密度 ρ_f 容易观测，且易受实验条件的控制，极化电荷体密度 ρ_p 在实验上不易测量。如果从场方程中消去 ρ_p ，可使问题简化。

将

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

代入式 (1.2.5) 得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

可以写成

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

引入电位移矢量 \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.2.6)$$

则有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.2.7)$$

这是电介质中静电场的基本方程之一，电位移矢量 \mathbf{D} 的散度只与自由电荷有关。

由方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

可以看出，电场强度 \mathbf{E} 的源是总电荷分布，因此 \mathbf{E} 是介质中总的宏观电场强度。电位移矢量 \mathbf{D} 的源只是自由电荷分布，不代表介质中的电场强度分布， \mathbf{E} 是基本物理量， \mathbf{D} 是辅助量。要求电场强度 \mathbf{E} 的分布，还必须找出 \mathbf{E} 与电位移矢量 \mathbf{D} 之间的关系。

实验指出，各种介质有不同的介电性能， \mathbf{E} 与 \mathbf{D} 的关系也不同。对于各向同性线性介质，电极化强度矢量 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 有简单的线性关系

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.2.8)$$

式中， χ_e 是介质的极化率，则有

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

令 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ ， $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ， ε 是介质的电容率，也称为介质的电容率， ε_r 是介质的相对电容率，也称为介质的相对电容率。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.2.9)$$

式 (1.2.9) 是各向同性线性介质中 \mathbf{E} 与 \mathbf{D} 的关系。

介质中静电场方程的另一方程， $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，仍然成立。

介质中静电场方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

有介质存在时，静电场仍是有源无旋场。

【讨论题】

(1) 是否可以将介质中静电场方程写成 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$?
 $\nabla \times \mathbf{D} = 0$

答: 一般不能写 $\nabla \times \mathbf{D} = 0$ 。这是因为 $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\varepsilon \mathbf{E}) = \nabla \varepsilon \times \mathbf{E} + \varepsilon \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \varepsilon \times \mathbf{E}$, 只有当 $\nabla \varepsilon \times \mathbf{E} = 0$ 时, 才有 $\nabla \times \mathbf{D} = 0$ 。一般情况下, $\nabla \times \mathbf{D} \neq 0$ 。

(2) 各向同性线性介质与均匀介质有什么区别?

答: 各向同性线性介质电极化强度矢量 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 之间是线性关系, 电位移矢量 \mathbf{D} 与电场强度 \mathbf{E} 也是线性关系。

各向同性线性介质又可分为均匀介质和非均匀介质, 均匀介质要求介质内部各点电容率 ε 相同, 当 ε 为常数时, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$, $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_f$ 。则有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f}{\varepsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

当自由电荷分布已给定时, 均匀介质中的电场强度是真空中同样自由电荷分布时的 $\frac{1}{\varepsilon_r}$ 倍。

另外, 可以证明均匀介质中 ρ_p 与 ρ_f 满足关系式

$$\rho_p = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \rho_f \quad (1.2.10)$$

对均匀介质, 当其中某点 $\rho_f = 0$ 时, 该点的 ρ_p 也一定为零。

1.3 静电场的边值关系

1.2 节讨论了有介质存在时静电场的规律, 在实际问题中常遇到不同介质的分界面或介质的表面。在这些面上, 由于介质的性质有突变, 场分布也会有突变。

在外电场的作用下, 两种介质分界面上一般出现一层极化电荷, 这些电荷的存在又使得界面两侧场量发生突变。例如, 图 1-7 所示的介质与真空分界面的情形。

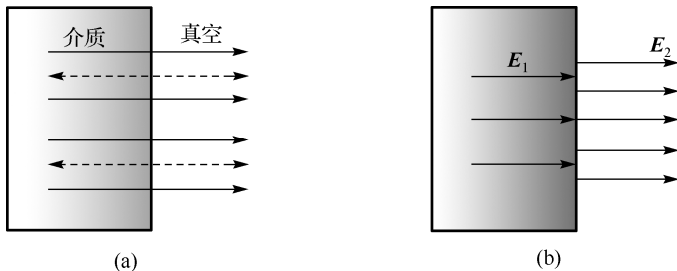


图 1-7 介质与真空分界面的情形

在外电场 \mathbf{E}_0 的作用下, 介质面上产生分布极化电荷。这些电荷激发的电场在介质内与 \mathbf{E}_0 反向, 在真空中与 \mathbf{E}_0 同向。

极化电荷激发的电场与外电场 \mathbf{E}_0 叠加后得到总电场如图 1-7(b) 表示, 可以看出, 分界面两侧的电场 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 在界面上发生了跃变。

介质中的静电场方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

是用场矢量的微商表示的, 这些方程只有在场矢量连续之处才成立。对于不同介质的分界面上, 场方程的微分形式已失去意义, 需要用新的形式来代替, 边值关系就是场方程在分界面上的表现形式, 它用来描述分界面两侧场量与界面上电荷分布的关系。在界面上, 电介质中静电场方程的积分形式还能适用, 这是因为场方程的积分形式可以应用于任意不连续分布的电荷激发的场。因此, 我们从电介质中静电场方程的积分形式来推导静电场的边值关系。

1.3.1 法向分量的跃变

静电场方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$
(1.3.1)

下面从式 (1.3.1) 出发推导静电场的边值关系, 因为界面上场矢量总可以分解为垂直于界面的法向分量和平行于界面的切向分量, 我们将分别讨论法向分量和切向分量的情况。先求法向分量的跃变。

利用 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -Q_p$, 将 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f$ 写成 $\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_p$ 。应用到两

种介质的分界面上的扁平状圆柱体, 如图 1-8 所示。

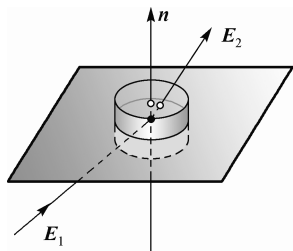


图 1-8 两种介质的分界面上的扁平状圆柱体

$$\varepsilon \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_f + Q_p \quad (Q_f + Q_p \text{ 为圆柱体内总电荷})$$

方程左边的面积分遍及柱体的上下底面和侧面, 上下底面的面积为 ΔS 。

$$Q_f + Q_p = (\sigma_f + \sigma_p) \Delta S$$

当柱体的厚度 $h \rightarrow 0$, 对侧面的积分趋于零。

对上下底面积分得

$$\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) \Delta S = (\sigma_f + \sigma_p) \Delta S$$

式中, $E_{2n} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}$, $E_{1n} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}$, 即

$$\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma_f + \sigma_p$$
(1.3.2)

由式 (1.2.4)

$$-\sigma_p = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = P_{2n} - P_{1n}$$

$$D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n} + P_{1n}, \quad D_{2n} = \varepsilon_0 E_{2n} + P_{2n}$$

可得到

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$
(1.3.3)

可写成矢量式

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$
(1.3.4)

式(1.3.4)中法向分量的单位矢量 \mathbf{n} 由介质1指向介质2。

由式(1.2.4)可知,在两种介质的分界面上,电极化强度矢量法向分量 P_n 的跃变与极化面电荷密度相关;由式(1.3.3)可知,电位移矢量法向分量 D_n 的跃变与自由电荷面密度相关;若 $\sigma_f=0$,则 D_n 连续。由式(1.3.2)可知,电场强度矢量法向分量 E_n 的跃变与总电荷面密度相关,即界面上无论存在哪种电荷, E_n 都会有跃变。由于通常只给出自由电荷分布,实际上主要用 D_n 的边值关系。

1.3.2 切向分量的跃变

利用 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 推导切向分量的跃变。

如图1-9所示,在平行于两种介质的分界面作一个狭长形回路,并令此回路与界面正交,并且长边与界面平行。由于短边 $h \rightarrow 0$, \mathbf{E} 对回路的环流

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = 0$$

\mathbf{t} 为切向分量单位矢量,取 $\mathbf{t} // d\mathbf{l}_2$, $d\mathbf{l} = d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l}_2$, 则有

$$(E_{2t} - E_{1t})d\mathbf{l} = 0$$

$$\text{即} \quad E_{2t} - E_{1t} = 0 \quad (1.3.5)$$

界面两侧 \mathbf{E} 的切向分量是连续的。

对于电位移矢量 \mathbf{D} 的切向分量有

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} - \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = 0$$

则有 $D_{2t} \neq D_{1t}$, \mathbf{D} 的切向分量有跃变。

由于切向分量 \mathbf{t} 可在切面内任意取向,则 \mathbf{E} 在切面上任何方向的分量都是连续的。

下面写出切向分量连续的矢量式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{E}_n = n(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{t})$$

对 $\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0$, 两边叉乘 \mathbf{n} 矢量

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t}) = 0$$

$$\text{利用} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n = 0$$

可写成

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (1.3.6)$$

最后可得静电场的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_f & D_{2n} - D_{1n} &= \sigma_f \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 & E_{2t} - E_{1t} &= 0 \end{aligned}$$

边值关系表示两种介质分界面两侧的场与分界面上电荷之间的制约关系,边值关系是两种介质分界面上的场方程。

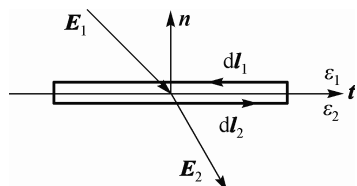


图 1-9 两种介质的分界面上的闭合回路

【例 1-2】无穷大平板电容器有两层介质，极板上自由面电荷密度分别为 $\pm\sigma_f$ (如图 1-10 所示)，求介质中的电场和极化电荷分布。

解：由对称性可知，电场沿垂直于平板的方向。

1. 利用边值关系先求 \mathbf{D} ，再求 \mathbf{E} 。

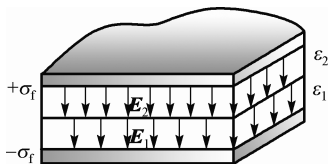


图 1-10 例 1-2 图 1

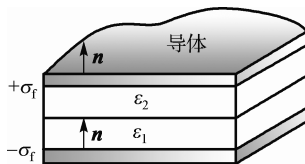


图 1-11 例 1-2 图 2

(1) 在上极板界面处，如图 1-11 所示，由边值关系

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f \quad (\mathbf{n} \text{ 由介质 2 指向上极板})$$

因上极板导体内电场强度 $\mathbf{E} = 0$

则有 $D_{1n} = 0, \quad D_{2n} = -\sigma_f$

$$E_{2t} = E_{1t}, \quad E_{1t} = 0, \quad E_{2t} = 0, \quad D_{2t} = 0$$

得到 $\mathbf{D}_2 = D_{2n} \mathbf{n} = -\sigma_f \mathbf{n}$

(2) 在下极板界面处，如图 1-11 所示

$$D_{1n} - D_{2n} = -\sigma_f \quad (\mathbf{n} \text{ 由下极板指向介质 1})$$

此时 $D_{2n} = 0, \quad D_{2t} = 0, \quad D_{1n} = -\sigma_f$

$$D_{1t} = 0$$

则有 $\mathbf{D}_1 = D_{1n} \mathbf{n} = -\sigma_f \mathbf{n}$

可见 $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = -\sigma_f \mathbf{n}$

由此得出

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_2} = -\frac{\sigma_f}{\varepsilon_2} \mathbf{n}$$

可见 $\mathbf{E}_1 \neq \mathbf{E}_2$ 。说明两种介质中电场强度 \mathbf{E} 不是连续的，电位移矢量 \mathbf{D} 是连续的。

2. 求极化电荷分布

极化电荷分布与电极化强度矢量 \mathbf{P} 有关，先求 \mathbf{P} 。

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_1 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = \left[-\sigma_f - \left(-\frac{\varepsilon_0 \sigma_f}{\varepsilon_1} \right) \right] \mathbf{n} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sigma_f \mathbf{n}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{D}_2 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) \sigma_f \mathbf{n}$$

\mathbf{P}_1 、 \mathbf{P}_2 为常矢量。

(1) 在介质内, $\rho_{1p} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_1 = 0$, $\rho_{2p} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_2 = 0$, 即在介质内极化电荷体密度为零。

(2) 在介质 2 与上极板交界处, \mathbf{n} 由介质 2 指向上极板, $\sigma_{2p} = -(P_{1n} - P_{2n})$ 导体内不能发生极化现象, $P_{1n} = 0$ 。则有

$$\sigma_{2p} = P_{2n} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) \sigma_f = - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \right) \sigma_f$$

由于 $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} < 1$, $\sigma_{2p} < 0$, σ_{2p} 为负极化电荷。

(3) 在介质 1 与下板交界处, \mathbf{n} 由下极板指向介质 1。

$$\sigma_{1p} = -P_{1n} = - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sigma_f = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right) \sigma_f$$

由于 $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} < 1$, $\sigma_{1p} > 0$, σ_{1p} 为正极化电荷。

(4) 在介质 1 与介质 2 交界处, \mathbf{n} 由介质 1 指向介质 2, 如图 1-12 所示。

$$\begin{aligned} \sigma_p &= -(P_{2n} - P_{1n}) \\ &= - \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) \sigma_f - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) \sigma_f \right] = - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right) \sigma_f \end{aligned}$$

介质整体是电中性的, 应该满足

$$\sigma_{1p} + \sigma_{2p} + \sigma_p = 0$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right) \sigma_f - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \right) \sigma_f - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right) \sigma_f = 0$$

根据电荷守恒定律, 也有此结果。

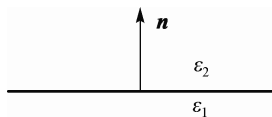


图 1-12 例 1-2 图 3

1.4 静电场的标势及其微分方程

1.4.1 静电场的标势

从静电场方程引入静电场的标势。

静电场满足 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 而任一标量函数 φ 的梯度的旋度恒等于零, 即 $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, 可以把静电场的电场强度 \mathbf{E} 表示成

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1.4.1)$$

无旋性是静电场的一个基本性质, 由于静电场的无旋性可以引入一个标量函数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 来描述静电场, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 称为静电场的标势, 即电势。式 (1.4.1) 中, 负号表示电场强度 \mathbf{E} 的方向与电势梯度 $\nabla \varphi$ 的方向相反, 指向电势减小最快的方向。

\mathbf{E} 沿任意方向 \mathbf{l} 上的分量为 $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, 无限接近两点间的电势差 $d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。

相隔有限距离的两点 P_1 与 P_2 之间的电势差

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4.2)$$

只有两点之间的电势差有意义, 通常在电场中选一参考点为电势零点, 则电场中任意一点 P 的电势为

$$\varphi(P) = \int_P^{\text{电势零点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4.3)$$

在电荷分布于有限区域的情况下, 通常选无穷远处作为参考点, 令 $\varphi(\infty) = 0$, 由式 (1.4.3) 得

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4.4)$$

引入电势 φ 可使求电场强度 \mathbf{E} 的问题简化。

【例 1-3】 求电偶极子的电场。

解: 等值异号相隔一微小距离的一对点电荷的电荷体系称为电偶极子, 如图 1-13 所示, 取原点为 $-q$ 处, z 轴沿 $\mathbf{p} = ql$ 的方向, 它在远处 ($r \gg l$) 任意一点 P 的电势为

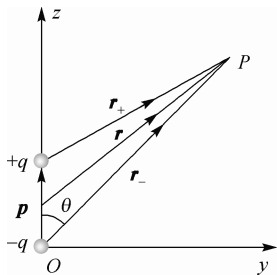


图 1-13 例 1-3 图

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}$$

可近似地令 $r_+ r_- \approx r^2$, $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$, 则有

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.4.5)$$

式中, r 是偶极子中心到 P 点的距离。

再由 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, 求偶极子的电场

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

由公式 $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

用公式

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}$$

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{p} = \mathbf{p}$$

\mathbf{p} 为常矢量

$$\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{p}) = 0, \quad (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{p} = 0$$

$$\nabla \frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{-3x}{r^5}$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{-3y}{r^5}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{-3z}{r^5}$$

$$\nabla \frac{1}{r^3} = \frac{-3}{r^5}(xe_x + ye_y + ze_z) = \frac{-3}{r^5}\mathbf{r}$$

得到电偶极子电场

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (1.4.6)$$

讨论解的物理意义

(1) 当 $\mathbf{r} // \mathbf{p}$ 时, 在延长线上任意一点 P

$$E_{//} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$$

(2) 当 $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$ 时, 在中垂线上任意一点 P

$$E_{\perp} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

可见, $|E_{//}| = 2|E_{\perp}|$, 说明电偶极子所激发的电场在电偶极矩的方向上最强, 在垂直于电偶极矩的方向上最弱。

1.4.2 静电势的微分方程和边值关系

1. 静电势的微分方程

在均匀各向同性的线性介质中, 静电场的散度方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

将 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 代入 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 方程中, 可得到静电势所满足的微分方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.4.7)$$

这个方程称为泊松方程, 泊松方程指出静电场中一点的电势和同一点的电荷密度之间的关系。

如果所考虑的区域没有自由电荷, 式 (1.4.7) 为

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.4.8)$$

这个方程称为拉普拉斯方程。这样就把静电学的问题归结为求解电势所满足的微分方程, 给出边界条件就可以确定电势 φ 的解, 求出电势 φ , 再由 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 求电场强度 \mathbf{E} 。

2. 静电势的边值关系

静电场方程写成了 φ 所满足的微分方程, 在两种介质的分界面上, 电势 φ 必须满足边值关系。下面把静电场的边值关系转化为电势 φ 的边值关系。

由静电场的边值关系

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

用 $E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 代入 D_n 的边值关系

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f \quad (1.4.9)$$

式中, \mathbf{n} 由介质 1 指向介质 2。

如图 1-14 所示, 考虑介质 1 与介质 2 分界面相邻两侧, 相邻的两点 P_1 与 P_2 , 把电荷由 P_1 移到 P_2 电场力所做的功为

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot h\mathbf{n} \quad h = \overline{P_1 P_2}$$

由于 \mathbf{E} 有限, $h \rightarrow 0$, 则把电荷从 $P_1 \rightarrow P_2$ 所做的功趋于零, 此界面两侧电势相等。

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (1.4.10)$$

在两种介质分界面上的电势 φ 是连续的, 这个结论与电场强度的切向分量连续是一致的。

证明: 设 P'_1 、 P'_2 为分界面两侧相邻的另外两点, 由电势连续的条件有 $\varphi'_2 = \varphi'_1$ 。因而 $\varphi'_1 - \varphi_1 = \varphi'_2 - \varphi_2$ 。设 P'_1 、 P'_2 相距为 Δl , 则

$$\varphi'_1 - \varphi_1 = -\mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l}$$

同理

$$\varphi'_2 - \varphi_2 = -\mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}$$

因此

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{l}, \text{ 即 } E_{2t} = E_{1t}$$

由于 $\Delta \mathbf{l}$ 为界面上的任意线元, 上式表示界面两边电场的切向分量相等。

以上将场量表述的边值关系

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

转化为

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

以上两式是静电势满足的边值关系的一般表达式。

3. 导体表面的边值关系

在静电场问题中, 常常有一些导体存在, 由于导体的特殊性质, 导体表面的边值关系有它的特点。

导体静电平衡的条件如下。

(1) 导体内部不带电, 电荷只分布在表面。

(2) 导体内部电场处处为零 (导体内必须 $\mathbf{E} = 0$, 否则导体内有自由电子受电场力而运动)。

(3) 导体表面电场必沿法线方向 (导体表面的电场不能有切向分量, 否则电子会沿导体表面运动)。导体表面为等势面, 整个导体为等势体。

设导体表面带面电荷密度为 σ , 导体外面的介质电容率为 ε 。

导体表面的边值关系为

$$\varphi = \text{常数} \quad (1.4.11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\sigma \quad (1.4.12)$$

在静电场问题中, 导体的边界条件分为两类: 一类是给定导体的电势, 如导体接地或接到一个具有固定电势的电源电极上, $\varphi = \varphi_s$; 另一类是给定导体上的总电量 $Q = - \oint_s \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\mathbf{S}$ 。

1.4.3 静电场的能量

在线性介质中, 静电场的总能量

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV \quad (1.4.13)$$

在静电场情况下, 总能量 W 可用电势和电荷分布表示。

由 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -\nabla \varphi \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) + \varphi \rho$$

因此

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \rho dV - \frac{1}{2} \int_{\infty} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV$$

利用高斯散度定理

$$\int_{\infty} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_{\infty} \varphi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

由于面积分遍及无穷远界面 $\varphi \propto \frac{1}{r}$, $D \propto \frac{1}{r^2}$, $S \propto r^2$ (S 为面积), 所以当 $r \rightarrow \infty$ 时, 面积分趋于零, 则有

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho \varphi dV \quad (1.4.14)$$

式 (1.4.13) 是用电荷分布和电势来表示静电场的总能量, 此式只有计算静电场总能量时才有意义。因此, 有限区域内的静电场能量不等于 $\int_V \frac{1}{2} \rho \varphi dV$, 而等于 $\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot dV$ 。

对于连续的电荷分布, $\varphi = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{4\pi\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 。

空间充满均匀介质, 电容率为 ε , 静电场的总能量为

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \int_{\infty} dV \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.4.15)$$

静电场的总能量表达式 (1.4.13)、式 (1.4.14)、式 (1.4.15) 是等价的。静电场情况下可用电荷分布表示电场能量是因为静电场是由电荷激发的, 电场由电荷的分布确定。电场的能量就由电荷分布所确定, 即静电场与源 (电荷) 同时存在, 没有源就没有场。对于非恒定情况, 因为电磁波可脱离波源而传播, 电场的总能量不能通过电荷分布表示。因此, 式 (1.4.13) 是普遍成立的。

1.5 静电场问题的解及其唯一性

1.5.1 静电场的基本问题

在各向同性的均匀介质中, 静电场的基本规律可用泊松方程 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 描述。真空中的静电场方程 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 可看作上式当 $\varepsilon = \varepsilon_0$ ($\varepsilon_r = 1$) 时的特殊情况。因此, $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 就是描述静电场基本规律的方程式, 从原则上讲, 静电场的基本问题就是利用这一规律解决有关问题。

一般情况下分为两类问题。

(1) 已知电势 φ , 由泊松方程求电荷分布 ρ , 通过求微商就可解决问题。

(2) 已知自由电荷分布 ρ 和边界条件, 由泊松方程求电势 φ , 再从 φ 求电场强度 \mathbf{E} 。

第二类问题是求泊松方程满足给定场源 ρ 和边界条件的解, 通常称为静电场中的边值问题。

求边值问题时, 经常遇到的边界条件有两类:

第一类边界条件是给定边界面上的电势 $\varphi|_S$, 这种情况称为第一类边值问题;

第二类边界条件是给定边界面上电势的法向导数 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ (相当于给定面电荷密度), 这种情况

称为第二类边值问题。

泊松方程仅在各向同性均匀介质中成立, 而实际问题中常常是整个区域的介质不均匀, 但其内部分区均匀, 在此情况下, 可以分区域求解。各个均匀区域内的电势由泊松方程决定, 不同区域的电势由介质分界面上的边值关系

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= -\sigma_f \\ \varphi_2 &= \varphi_1\end{aligned}$$

相联系。因此, 静电场的基本问题是先求出在各个均匀区域满足泊松方程, 在各个分界面上满足边值关系, 在所研究的整个区域边界上满足边界条件的电势。

根据微分方程理论, 泊松方程的解可以表示为它的一个特解 $\varphi'(\mathbf{r})$ 加上所对应的齐次方程 (拉普拉斯方程) 的解 $\varphi''(\mathbf{r})$ 。

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi'(\mathbf{r}) + \varphi''(\mathbf{r}) \quad (1.5.1)$$

特解 $\varphi'(\mathbf{r})$ 部分就是求解区域内所有电荷在 \mathbf{r} 处产生的电势

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\varphi''(\mathbf{r}) \text{ 满足 } \nabla^2\varphi''(\mathbf{r}) = 0$$

$\varphi''(\mathbf{r})$ 表示这个区域的边界上或区域之外的电荷所产生的电势及外场的作用。由叠加原理, 在 \mathbf{r} 处产生的总电势为两者之和。于是整个解为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \varphi''(\mathbf{r}) \quad (1.5.2)$$

1.5.2 静电场问题的唯一性定理

求解边值问题时，总希望在有界区域内存在唯一的物理上合理的解，那么对此怎么判别呢？静电场的唯一性定理就是解决这个问题的。

下面将证明，如在空间任意区域 V 内给定电荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ ，在 V 的边界 S 上给定第一类或第二类边界条件时，静电场泊松方程的解是唯一的，或者说它所对应的拉普拉斯方程的解是唯一的。

证明：用反证法

若体积 V 内泊松方程为 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ ，边界面 S 上给定第一类或第二类边界条件，我们假定存在两个满足相同边界条件的解 φ_1 和 φ_2 。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \varphi_2 &= -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}$$

令 $U = \varphi_2 - \varphi_1$ ，于是在 V 内满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \varphi_2 - \nabla^2 \varphi_1 = 0$$

由于边界条件相同，在边界面 S 上第一类边界条件 $\varphi_2|_S = \varphi_1|_S$ ，则有

$$U|_S = \varphi_2|_S - \varphi_1|_S = 0$$

由第二类边界条件 $\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S$ ，可得

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S = 0$$

由格林第一公式

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

令 $\varphi = \psi = U$ ，可得

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) dV = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

因为在边界上 $U|_S = 0$ 或者 $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0$ ，则两种情况的面积分都等于零，又因为 $\nabla^2 U = 0$ ，则有

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = 0, \text{ 这就意味着 } \nabla U = 0.$$

因此，在 V 内 U 是恒量， $\nabla U = 0$ ， $U = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{恒量 (常数)}$ 。

对第一类边界条件（第一类边值问题）在 V 的边界面上 $U|_S = \varphi_2|_S - \varphi_1|_S = 0$ ，即在 V 中， $\varphi_1 = \varphi_2$ ，电势是唯一确定的。

对第二类边界条件（第二类边值问题）在 V 的边界面上 $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 0$ ，电势不能确定，但只

相差一个任意相加的常数, 故电场还是唯一确定的。这就证明了只要在求解区域的边界上给定第一类或第二类边界条件, 静电场问题的解唯一确定。

唯一性定理对于解决实际问题有重要的指导意义。首先可按唯一性定理的条件分析问题是否有解, 对一些较简单的问题, 可以从物理上分析解的形式, 提出试探性的解, 只要能满足唯一性定理的条件, 这个解就是唯一正确的解。

【例 1-4】 如图 1-15 所示, 一电量为 Q 的小导体球与大导体球壳同心地放置, 其间充以两种介质, 左半部的电容率为 ε_1 , 右半部的电容率为 ε_2 。外球壳接地, 小球半径为 a , 球壳内半径为 b , 求介质中的电场和电荷分布。

解: 以唯一性定理为依据来求解。先写出本例中电势 φ 应满足的方程和边值关系, 以及边界条件。求解区域 V 为导体球与球壳之间的空间, 边界面是导体球面 S_1 与导体球壳内表面 S_2 , 边界条件为: 在 S_1 上总电量为 Q , 在 S_2 上 $\varphi=0$ 。

在两种介质中, 电势 φ 都满足拉普拉斯方程, 在两种介质交界面处, 电势 φ 连续, 界面上 $\sigma_f=0$, 电位移矢量的法向分量连续。

综合以上分析, φ 应满足的条件为

(1) 在两种介质中

$$\nabla^2 \varphi_i = 0, \quad (i=1,2)$$

(2) 在两种介质的分界面上

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

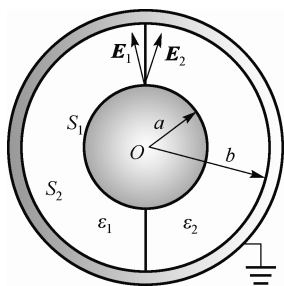


图 1-15 例 1-4 图 1

(3) 在边界面 S_1 上, 已知 Q

(4) 在边界面 S_2 上, 已知 $\varphi=0$

无论用何种方法, 只要求出的 φ 满足以上条件, 根据唯一性定理, φ 就是本题唯一正确的解。

选坐标原点在球心, 如果仍假设 E 保持球对称, 则可设

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{A}{r} + B \\ \varphi_2 &= \frac{C}{r} + D \end{aligned}$$

φ_1 、 φ_2 满足

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

在 $r=b$ 处,

$$\varphi_1|_{r=b} = \frac{A}{b} + B = 0, \quad B = -\frac{A}{b}, \quad \varphi_1 = A \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

同样有

$$\varphi_2|_{r=b} = \frac{C}{b} + D = 0, \quad D = -\frac{C}{b}, \quad \varphi_2 = C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

由于在分界面上 $\varphi_1 = \varphi_2$, 所以 $A=C$ 。在分界面上 \mathbf{n} 与 \mathbf{r} 垂直, 但是 φ_1 、 φ_2 都只与 r 有关, 所以 $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$, φ_1 、 φ_2 也满足了 D_n 连续的条件。

到现在为止, 除了在 S_1 上总电荷为 Q 外, φ 满足了其他全部的条件, 而 φ 也只剩下一个待定的常数 A , 现在用 φ 必须满足在 S_1 上的总电量 Q 这个条件来确定 A 。

即

$$\oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 = \frac{A\varepsilon_1 \mathbf{r}}{r^3} \quad (\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1)$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 = \frac{A\varepsilon_2 \mathbf{r}}{r^3} \quad (\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_{1左}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{1右}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \left(\frac{A\varepsilon_1}{a^2} + \frac{A\varepsilon_2}{a^2} \right) 2\pi a^2 = Q \end{aligned}$$

由此可得

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \quad (\text{左半球})$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \quad (\text{右半球})$$

此解满足唯一性定理的所有条件, 因此是唯一正确的解。

相应地

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q\mathbf{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}$$

可见

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2, \quad |\mathbf{D}_1| \neq |\mathbf{D}_2|$$

下面求自由电荷与极化电荷分布, 在导体球面处自由电荷分布:

$$\sigma_{1f} = D_{1r}|_{r=a} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_{2f} = D_{2r}|_{r=a} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_{1f} \neq \sigma_{2f}$$

在导体球壳内表面处自由电荷分布

$$\sigma_{1f} = -D_{1r}|_{r=b} = \frac{-\varepsilon_1 Q}{2\pi b^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_{2f} = -D_{2r}|_{r=b} = \frac{-\varepsilon_2 Q}{2\pi b^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

欲求极化电荷分布, 先求 \mathbf{P} 的分布。

由

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_1 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{D}_2 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

在介质内部极化电荷分布

$$\rho_{1P} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_1 = 0$$

$$\rho_{2P} = -\nabla \cdot \mathbf{P}_2 = 0$$

在导体球表面极化电荷分布

$$\sigma_{1P} = -P_{1r} \Big|_{r=a} = \frac{-Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\sigma_{2P} = -P_{2r} \Big|_{r=a} = \frac{-Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

总电荷分布

$$\sigma_{1f} + \sigma_{1P} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sigma_1$$

$$\sigma_{2f} + \sigma_{2P} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sigma_2$$

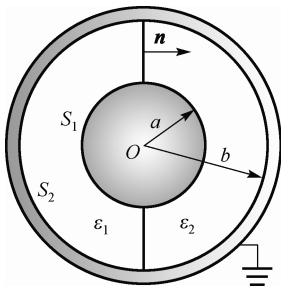


图 1-16 例 1-4 图 2

可见, $\sigma_1 = \sigma_2$ 这是静电平衡所要求的。

在左半球面的总电荷密度 (包括 σ_f 、 σ_p) 与右半球面的总电荷面密度相等, 这就从电荷分布方面说明了 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 表示式相同的原因, 在球壳内表面处的电荷分布也有类似的情况。

在两种介质分界面处, 由于 $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}$, 如图 1-16 所示, 因而 $P_n = 0$, 则有 $\sigma_p = 0$ 。

实际上, 在两种介质的分界面处, 因为 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{P} 均沿 \mathbf{r} 方向, 在垂直于 \mathbf{r} 的方向上, \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{P} 均为零。

导体球的总电荷 Q 与 σ_{1f} 、 σ_{2f} 的关系

$$Q = 2\pi a^2 \sigma_{1f} + 2\pi a^2 \sigma_{2f} = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \sigma_{1f} = 2\pi a^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sigma_{2f}$$

讨论解的物理意义

本题得到的结论如下。

(1) $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{D}_2$, \mathbf{D} 不是均匀分布的; $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$, 电场强度 \mathbf{E} 是对称分布的。

(2) 在导体球面上 $\sigma_{1f} \neq \sigma_{2f}$, 自由电荷面密度 σ_{if} 不是均匀分布的; $\sigma_{1P} \neq \sigma_{2P}$, 极化电荷面密度 σ_{iP} 不是均匀分布的; $\sigma_{2f} + \sigma_{2P} = \sigma_{1f} + \sigma_{1P}$, 总电荷面密度 σ_i 是均匀分布的。

由结论 (1) 电场强度 \mathbf{E} 均匀分布, 可从边值关系 $E_{1t} = E_{2t}$ 得到, 这是静电场的基本规律。另一方面, $\sigma_1 = \sigma_2$, 即左半球面与右半球面自由电荷与极化电荷总和是相等的,

因为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$, \mathbf{E} 是由自由电荷和极化电荷共同激发的, $\sigma_f + \sigma_p$ 是均匀的, 则 \mathbf{E} 也是均匀的。

结论 (2) σ_f 、 σ_p 不能均匀分布是静电平衡条件所要求的。

假设 σ_f 是均匀分布的, 由于 $\sigma_p = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right) \sigma_f$, 可见 σ_p 在两个半球面上由于 ε 取值的不同而不同。导体球内的静电场由 σ_f 和 σ_p 共同激发, 由于 σ_f 均匀分布, 所以 σ_f 在球内的电场为零, 但 σ_p 由于非均匀分布, 将导致它在球内的电场不为零, 这样导体球就不能达到静电平衡, 由此可知, 要使导体球达到静电平衡, σ_f 必须不是均匀分布的。

对于导体球壳内表面 σ_f 的分布也可以根据静电平衡的要求来讨论。

1.6 镜 像 法

我们已经知道, 静电学的问题可以归结为在给定第一类边界条件或第二类边界条件下, 求解泊松方程, 并证明了解的唯一性。无论用什么方法求出的解, 只要满足唯一性定理的条件, 解就是唯一的。就是说, 在一定条件下可决定唯一的解, 但采用什么方法, 没有普遍适用的方法, 要视不同情况采用不同的解法, 只有在界面形式是比较简单的几何曲面时, 才可以写出解析形式的解。

本节将介绍两种最常用的最基本的解析解法: 镜像法和分离变量法。

1.6.1 镜像法的基本思想

如果空间只有点电荷, 而边界是导体面或介质面, 在点电荷场的作用下, 边界面上出现感应电荷或极化电荷。由叠加原理, 空间区域内的总场应等于区域内点电荷的场加上边界面上感应或极化电荷的场。从静电场基本方程的角度来看, 电势满足的泊松方程为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.6.1)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \varphi'' \quad \nabla^2 \varphi'' = 0 \quad (1.6.2)$$

式 (1.6.2) 中第一项是区域内点电荷的贡献, 第二项 φ'' 正是边界面上感应或极化电荷的贡献。这类问题的关键是求出 φ'' , 即求解拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi'' = 0$ 。

在边界面简单而对称的情况下, 镜像法是对边界面上感应或极化电荷作某种等效的代替, 从而不用直接解方程求 φ'' , 它属于一种间接的方法。因此, 镜像法适用于区域内只有一个或几个点电荷, 区域的边界是一些对称的导体或介质界面。

镜像法的基本思想是用假想的“虚”点电荷来等效地代替某些规则而对称的导体或介质面。(如平面、球面、圆柱面)上感应电荷或极化电荷分布。所谓等效代替是通过适当选取假想电荷的大小和位置, 以保证仍然满足求解区域原来的方程和边界条件不变。因此, 求解区域的场是原有点电荷和等效电荷产生的场的线性叠加。根据唯一性定理, 由于求解区域原来的场方程和边界条件均得到满足。所以, 这样求出的解是唯一正确的解。

计算结果表明, 假想电荷所在点对于边界面来说, 总是原有电荷所在点的共轭点。如将

边界面看成一面“镜子”，假想电荷就是原有电荷在镜中的像。将假想电荷称为像电荷，镜像法正是由此而得名。

1.6.2 镜像法求解静电场问题

【例 1-5】 接地无限大平面导体板附近有一点电荷 q ，如图 1-17 所示。求空间中的电场。

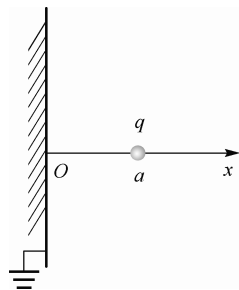


图 1-17 例 1-5 图 1

解：根据静电屏蔽性质可判断出，在左半空间没有场，求解区域为右半空间。

求解区域的边界面为无限大导体板面和无穷远处的界面

方程： $\nabla^2\varphi=0$ （除 q 所在点外）

边界条件：（1） $\varphi|_s=0$

（2） $\varphi|_\infty=0$

右半空间的电场是 q 与板上感应电荷共同激发的，但板上感应电荷预先不能知道。

设想：用一个假想点电荷 q' 来等效代替导体板上的感应电荷。这样右半空间的电场就是两个点电荷 q 和 q' 共同激发的。

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (1.6.3)$$

可以这样等效代替的条件是原有场方程和边界条件不变。 φ 应满足场方程和边界条件。

为了满足原来的场方程， q' 必须在左半空间。

为了满足边界条件（1） $\varphi|_s=0$ ，即 q 和 q' 共同激发的电势在边界面上为零。

即

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0$$

则要求 $q' = -q$ ， q' 位于导体板左方与 q 对称的点。即位于 $(-a, 0, 0)$ 点， q 位于 $(a, 0, 0)$ 点（如图 1-18 所示）。

边界条件（2）总是自然满足的。

空间任意一点 P 点的电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

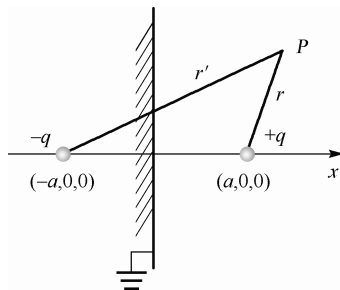


图 1-18 例 1-5 图 2

在直角坐标系下：

$$r = [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r' = [(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

由以上步骤可知：

（1）保持场方程不变，可定出像电荷 q' 的大致区域。满足边界条件不变，可定出像电荷 q' 的大小和位置。

(2) 由本例 $q' = -q$, q' 与 q 数值相等, 位置对于边界面对称, 可以称 q' 为 q 的像电荷。

以上用像电荷 q' 代替导体板上的感应电荷, 得到导体板上感应电荷总电量为 $-q$ 。下面利用边值关系求出导体板上的感应电荷分布。

根据导体表面的边值关系:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} \\ -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \bigg|_{x=0} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-2a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma &= -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

可见, 导体板上感应电荷与 q 异号, 这是合理的。

现在进一步求出导体板上感应电量 Q 。已知感应面电荷密度, 对无限大平板积分即可。

由图 1-19 可知, S 面在 xOz 平面, 取平面极坐标。

$$Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma \rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho d\theta$$

$$= -aq \left[-\frac{1}{(a^2 + \rho^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = -q$$

$$Q = -q$$

可见, 平面上感应电荷电量恰好与电荷电量相等。

由此例题, 可总结出镜像法一般步骤:

- (1) 写出原问题的方程和边界条件;
- (2) 设一假想点电荷 q' , 来代替边界面上的感应电荷

或极化电荷;

- (3) 写出原点电荷 q 与假想点电荷 q' 共同激发的电势;
- (4) 由场方程和边界条件确定像电荷 q' 的大小和位置;
- (5) 讨论解的物理意义。

另外要注意以下两点。

(1) 镜像法的实质是用假想的点电荷代替边界面上的感应电荷或极化电荷。可以代替的条件是原来的场方程和边界条件不变, 因此必须注意把解应满足的场方程和边界条件搞清楚。

(2) 像电荷 q' 只能代替边界面上感应电荷在右半空间的作用, 却不能代替其在左半空间的作用, 这是因为像电荷 q' 的存在已经改变了左半空间的场方程。

【例 1-6】 有一半径为 r_0 的接地导体球, 距球心为 a ($a > r_0$) 处有一点电荷 q , 如图 1-20 所示, 求空间各点的电势。

解: 接地导体球球内电势为零。球外空间的电势 φ 由点电荷 q 及球面上的感应电荷共同激发。

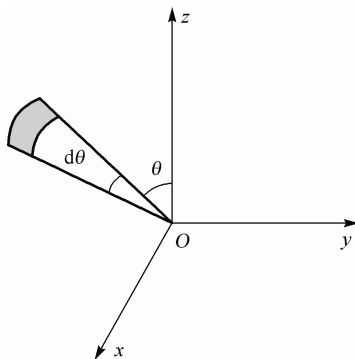


图 1-19 例 1-5 图 3

球外电势 φ 应满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ (除 q 所在点)

边界条件为 (1) 球面上: $\varphi|_s = 0$

(2) 无穷远处: $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$

用一像电荷 q' 来代替球面上的感应电荷。

为了不改变原方程, q' 必须在球内, 根据对称性, 应在 Oq 连线上 (x 轴上) 距球心距离为 b , 如图 1-21 所示。为了不改变边界条件, 应满足边界条件 (1) $\varphi|_s = 0$, (2) $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$ 。边界条件 (2) 自然满足。

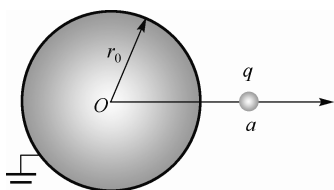


图 1-20 例 1-6 图 1

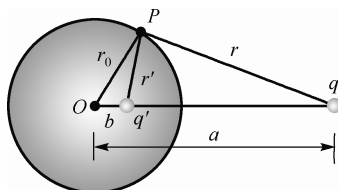


图 1-21 例 1-6 图 2

边界条件 (1) $\varphi|_s = 0$ 要求 q 和 q' 共同激发的电势 φ 在球面上任一点 P 处为零。

即

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = 0$$

可写成

$$\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} = 0 \quad (1.6.4)$$

r' 与 q' 应从式 (1.6.4) 中求出, 即由边界条件确定像电荷 q' 的大小和位置。可用两种方法求解: 几何法与解代数方程法。

先用几何法求解

由

$$\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} = 0$$

可得

$$\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$$

因此对球面上任意一点满足

$$\frac{r'}{r} = -\frac{q'}{q} = \text{常数} \quad (1.6.5)$$

由图 1-21 可见, 只要选 q' 的位置使 $\triangle Oq'P$ 和 $\triangle OPq$ 相似。

则有

$$\frac{r'}{r} = \frac{r_0}{a} = \text{常数}$$

两三角形相似的条件, $\frac{b}{r_0} = \frac{r_0}{a}$

可得

$$b = \frac{r_0^2}{a} \quad (1.6.6)$$

则
$$q' = -\frac{q}{r}r' = -q\frac{r_0}{a} \quad (1.6.7)$$

q' 的大小和位置都被确定

$$b = \frac{r_0^2}{a}$$

$$q' = -q\frac{r_0}{a}$$

球外任一点 P 的电势

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0}{ar'} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} - \frac{\frac{r_0}{a}}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} \right] \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

式中

$$b = \frac{r_0^2}{a}$$

再用解代数方程法求解

球面上任一点满足
$$\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} = 0$$

而
$$r^2 = a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta, \quad r'^2 = b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\theta$$

代入上式可得

$$q'^2(a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta) = q^2(b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\theta)$$

移项后得

$$q'^2(a^2 + r_0^2) - q^2(b^2 + r_0^2) = 2r_0\cos\theta(q'^2a - q^2b)$$

上式左边为一常数，右边含有变量，对任何 θ 都使上式成立，只有使两边都等于零。

$$q'^2(a^2 + r_0^2) = q^2(b^2 + r_0^2)$$

$$q'^2a = q^2b$$

由后一方程得出

$$q'^2 = \frac{b}{a}q^2$$

代入前一方程

$$\frac{b}{a}(a^2 + r_0^2) = (b^2 + r_0^2)$$

$$b^2 - \frac{1}{a}(a^2 + r_0^2)b + r_0^2 = 0$$

这是 b 的二次方程, 解之即得

$$b = \frac{r_0^2}{a} \text{ 或 } b = a$$

$b = a$ 不合物理要求, 由于此时 q' 已在球外, 改变了 a 点的电荷分布, 故舍去。

$$\text{将 } b = \frac{r_0^2}{a} \text{ 代入 } q'^2 = \frac{b}{a} q^2 \text{ 中, 得到 } q'^2 = \frac{r_0^2}{a^2} q^2$$

$$q' = -\frac{r_0}{a} q$$

至此已解出 q' 和 b , 即

$$b = \frac{r_0^2}{a} \quad (b < r_0, \quad a > r_0)$$

$$q' = -\frac{r_0}{a} q \quad (|q'| < |q|)$$

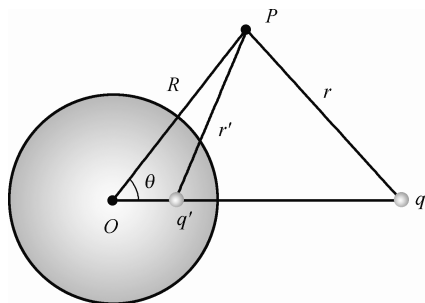


图 1-22 例 1-6 图 3

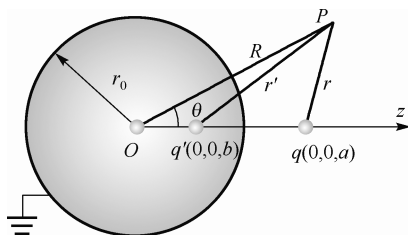


图 1-23 例 1-6 图 4

讨论解的物理意义

(1) 由高斯定理可以求出球面上感应电荷总量等于 q' 。

包围导体球作一高斯面 S' , 利用高斯定理

$$\oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q 是球面上感应电荷的总电量。

综上所述, 高斯面上任意一点电场是像电荷 q' 和点电荷 q 共同激发的, 所以又有

$$\oint_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

则有 $q' = Q$, 即感应电荷的电量和像电荷的电量相等。

(2) 可由 $\sigma_f = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \Big|_{R=r_0}$ 求出球面上感应电荷密度。

$$\sigma_f = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \Big|_{R=r_0}$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} - \frac{\frac{r_0}{a}}{\sqrt{R^2 + \frac{r_0^4}{a^2} - 2R\frac{r_0^2}{a}\cos\theta}} \right) \right] \Big|_{R=r_0}$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{-\frac{1}{2}(2r_0 - 2a\cos\theta)}{(r_0^2 + a^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-\frac{1}{2}\left(2r_0 - 2\frac{r_0^2}{a}\cos\theta\right)\frac{r_0}{a}}{\left(r_0^2 + \frac{r_0^4}{a^2} - 2\frac{r_0^3}{a}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

方括号中, 第一项为 $\frac{a\cos\theta - r_0}{(r_0^2 + a^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$, 第二项为 $\frac{\frac{r_0^3}{a^2}\cos\theta - \frac{r_0^2}{a}}{\left(r_0^2 + \frac{r_0^4}{a^2} - 2\frac{r_0^3}{a}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$, 第二项的分子

分母同乘 a^3 , 得 $\frac{r_0^3a\cos\theta - a^2r_0^2}{r_0^3(r_0^2 + a^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$, 则有

$$\sigma_f = -\frac{q}{4\pi} \frac{ar_0^3\cos\theta - r_0^4 - r_0^3a\cos\theta + a^2r_0^2}{r_0^3(r_0^2 + a^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{a^2 - r_0^2}{r_0(r_0^2 + a^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\sigma_f = -\frac{q}{4\pi} \frac{a^2 - r_0^2}{r_0(a^2 + r_0^2 - 2r_0a\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

感应电荷总电量 $q' = \oint_S \sigma_f dS = -\frac{r_0}{a}q$

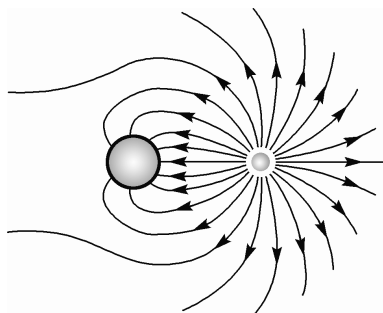


图 1-24 电场线分布

(3) 由计算结果 $q' = -\frac{qr_0}{a}$, $|q'| < q$, 可知球面上的

感应电荷为负电荷。

由 Q 发出的电场线只有一小部分收敛于球面上, 剩余部分伸展到无穷远处, 电场线分布如图 1-24 所示。

【例 1-7】 如例 1-6, 但导体球不接地, 而带电荷 Q_0 , 求球外电势, 并求电荷 q 所受的力。

解: 本题给定的是导体上的总电量, 只要找出一种合理的电荷分布使导体球上电荷总量不变, 根据唯一性定理, 即可得到正确的解。

这里给出的条件是导体上的总电荷, 包括:

(1) 球面为等势面 (电势待定);

(2) 从球面发出的总电通量为 Q_0 (球面的总电量为 Q_0)。

由例 1-6 可知, 若在球外有电荷 q , 而在球内放置假想电荷 q' , 其大小位置如例 1-6。则球面上电势为零。若在球心处再放一个假想电荷 $(Q_0 - q')$, 则导体球所带总电荷为 Q_0 。同时球

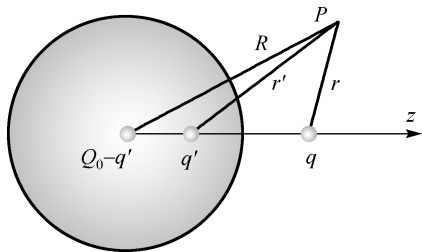


图 1-25 例 1-7 图

面仍为等势面, 其电势为 $\frac{Q_0 - q'}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ 。如图 1-25 所示。

因此条件 (1) 和 (2) 都被满足, 球外一点 P 的电势为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{Q_0 - q'}{R} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} - \frac{r_0 Q_0}{ar'} + \frac{Q_0 + r_0 \frac{Q}{a}}{R} \right)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}r &= (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \\ r' &= (R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \\ b &= \frac{r_0^2}{a}\end{aligned}$$

下面求点电荷 q 与带电为 Q_0 的导体球之间的相互作用力。

因为空间的电势相当于点电荷 q , 镜像电荷 q' 和球心处的电荷 $Q_0 - q$ 共同激发, 此电荷 q 所受的力等于 q' 和球心处的电荷 $Q_0 - q'$ 对它的作用力 F

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q(Q_0 - q')}{a^2} + \frac{qq'}{(a-b)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ_0}{a^2} + \frac{q^2 r_0 / a}{a^2} - \frac{q^2 r_0 / a}{\left(a - \frac{r_0^2}{a}\right)^2} \right]$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ_0}{a^2} - \frac{q^2 r_0^3 (2a^2 - r_0^2)}{a^3 (a^2 - r_0^2)^2} \right]$$

作用力的方向是由 O 指向 q

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qQ_0}{a^2} - \frac{q^2 r_0^3 (2a^2 - r_0^2)}{a^3 (a^2 - r_0^2)^2} \right] \frac{\mathbf{a}}{a}$$

讨论解的物理意义

(1) 当 $a \gg r_0$ 时, 第二项可忽略。

$$F \approx \frac{qQ_0}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

近似为 q 与 Q_0 两个点电荷之间的作用力。

(2) 当 $a \approx r_0$ (但 $a > r_0$) 时, 第二项的数值大于第一项, 因此不论 Q_0 、 q 是同性, 还是异性永远为吸引力。也就是说, 只要 q 距球面足够近, 它就可能受到导体球的吸引力。这是由于静电感应作用, 虽然整个导体的总电荷是正的, 但在靠近 q 的球面部分可能出现负电荷。

(3) 此题也可用叠加原理求解

第一步先将导体球接地, 在球内距球心 b 处放一电荷 q' , 利用例 1-6 的结果, 当 $b = \frac{r_0^2}{a}$ 、

$q' = -\frac{r_0^2}{a}q$ 时, q 与 q' 使球面电势为零。

第二步去掉导体球的接地线, 此时电荷分布已达平衡。再给此导体球加电荷 $(Q_0 - q')$, 所加电荷必在导体球面上均匀分布。因此 $(Q_0 - q')$ 在球面上产生的电势与 $(Q_0 - q')$ 在球心一样, 这样才使球面为等势面。故此电荷分布是合理的, 此时导体球的荷电总量为 $(Q_0 - q') + q' = Q_0$, 恰好满足唯一性定理的要求。

(4) 如果点电荷 q 不在球外, 而在球壳内 a 点 ($a < r_0$), 如图 1-26 所示, 欲保持球面为等势面, 求球壳内的电势时, 则它的像电荷必须放在球壳外的共轭点上 (共轭点可以互相反演)。

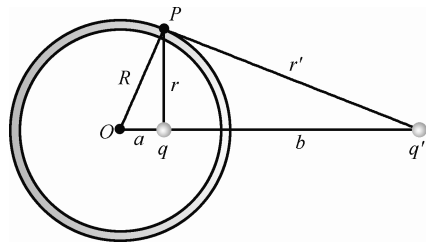


图 1-26 点电荷在球壳内, 像电荷在球壳外

前面讲的例题涉及的都是平面或球面这种单一的分界面。对单一分界面, 像电荷一般只有一个。对平面球面的组合情况, 仍可用镜像法求解, 但这时像电荷的个数不止一个, 有的还可能有无穷多个。

【例 1-8】 在接地的导体平面上有一半径为 a 的半球凸部 (如图 1-27 所示), 半球的球心在导体平面上。点电荷 q 位于半径的对称轴上, 并与平面相距为 b ($b > a$), 试用镜像法求空间电势。

解: 选像电荷的位置, 使点电荷和像电荷产生的电势叠加, 保持整个界面 $\varphi = 0$ 。可将整个界面分为两部分。

如图 1-28 所示, 一部分是平面 AB 和 CD 。另一部分是半凸面 BC 。要保证平面 AB 、 CD 上 $\varphi = 0$, 由例 1-5 接地无穷大导体平面附近有一点电荷的镜像法结果, 必须在 $x = -b$ 处有一个像电荷 $-q$ 。

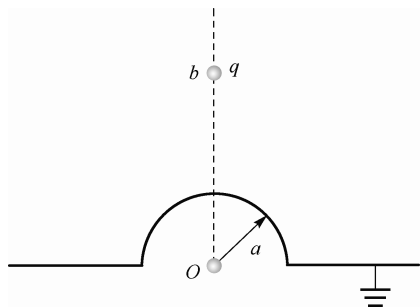


图 1-27 例 1-8 图 1

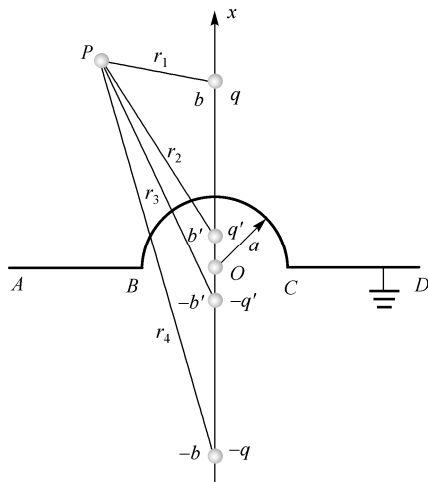


图 1-28 例 1-8 图 2

要保证半圆状凸面 BC 上 $\varphi = 0$, 必须在 b' 点 ($b' = \frac{a^2}{b}$) 处有一个电量为 $q' = q \frac{a}{b}$ 的像电荷。

由例 1-6 可知, 这是接地导体球外一个点电荷的结果。为了抵消所缺部分产生的电势的影响, 在 $x = -b'$ 处有一个像电荷 q' 。这样在空间 P 点的电势是点电荷和三个像电荷产生的电势的叠加。

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{-q'}{r_3} + \frac{-q}{r_4} \right)$$

式中

$$r_1 = [(x-b)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_2 = [(x-b')^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_3 = [(x+b')^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$r_4 = [(x+b)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$b' = \frac{a^2}{b} \quad q' = -q \frac{a}{b}$$

这个问题也可从另一角度理解： q 、 $-q$ 保证平面 $\varphi=0$ ，再加 q' 保证球面上 $\varphi=0$ ，但此时不能保证平面 $\varphi=0$ ，只有再加 $-q'$ 才能保证平面、球面 φ 均为零。

【例 1-9】 设有电容率为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种均匀介质，以无限大平面为界，在介质 ϵ_1 中有一点电荷 q ，位于距平面为 d 处，求空间电势分布。

解：空间的电势由点电荷 q 与分界面上的极化电荷及 q 附近的极化电荷共同产生。如图 1-29 所示，建立坐标系，两种介质分界面为 $x=0$ 面。设在 $x>0$ 区域，电势为 φ_1 ； $x<0$ 区域，电势为 φ_2 。

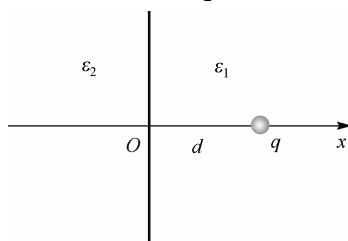


图 1-29 例 1-9 图

φ_1 、 φ_2 满足方程：

在 $x>0$ 区域

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{q}{\epsilon_1} \delta(x-d)$$

在 $x<0$ 区域

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0$$

在边界上满足边界条件

$$x \rightarrow \infty \quad \varphi_1 = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad \varphi_2 = 0$$

两种介质分界面 ($x=0$) 上满足边值关系

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

1. 在 $x>0$ 区域求解

可用像电荷 q' 来代替分界面上极化电荷。为了满足 $x>0$ 区域的场方程， q' 必在 $x<0$ 区域。根据对称性，将 q' 放在 $-d$ 处， q 、 q' 在 $x>0$ 区域任一点激发的电势为：

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 r'}$$

2. 在 $x<0$ 区域求解

可用像电荷 q'' 来代替分界面上的极化电荷。为了满足 $x<0$ 区域场方程， q'' 必位于 $x>0$ 区域。根据对称性， q'' 位于 d 处，与原来的 q 重合。设 $q'' + q = q''$ ， q'' 包含了像电荷 q'' 和点电荷 q 的贡献。

$$\varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r}$$

于是, 这样假定的像电荷的位置, (1) 保证了求解区域场方程不变; (2) 保证了边界条件不变。

下面由边值关系来定出像电荷的电量。

$$r = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}$$

在 $x=0$ 面上

$$r = r' = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$$

要满足 $\varphi_1 = \varphi_2$, 即

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_1 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 r'} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2 r}$$

必须有

$$\frac{1}{\epsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\epsilon_2}q''$$

又

$$\epsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \epsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0}$$

而

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-q(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q'(x+d)}{[(x+d)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{qd}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q'd}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \epsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi} \frac{q''d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

要满足

$$\epsilon_1 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \epsilon_2 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|_{x=0}$$

必有

$$q - q' = q''$$

两式联立

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \\ q - q' &= q'' \end{aligned}$$

将 $q'' = q - q'$ 代入 $\frac{1}{\epsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\epsilon_2}q''$ 中, 等式两端同乘 ϵ_1 、 ϵ_2 得

$$\begin{aligned} \epsilon_2(q + q') &= \epsilon_1(q - q') \\ (\epsilon_2 + \epsilon_1)q' &= (\epsilon_1 - \epsilon_2)q \end{aligned}$$

可解出像电荷

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q \quad (1.6.9)$$

$$q'' = q - q' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (1.6.10)$$

将 q' 、 q'' 代入 φ_1 、 φ_2 中, 即得空间各点的电势

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (1.6.11)$$

$$\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.6.12)$$

注意: (1) 此结论是假定 q 位于介质 ε_1 中。

(2) 推导过程中, 假定 q' 、 q'' 与 q 同号。从 $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$ 看, q'' 总是与 q 同号。而

q' 则不然, $q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q$, q' 的正负要看 $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ 的符号了。

从物理上看, 这种情况下的像电荷是不同介质交界面上极化电荷的等效代替。对于不同的求解区域, 由于介质不同, 所以像电荷也不同。

1.7 分离变量法

1.7.1 分离变量法的适用范围

求解区域中介质分区均匀, 且自由电荷 $\rho_f = 0$, 或者自由电荷都分布在区域的界面上, 电势 φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

在求解区域内 $\rho_f \neq 0$, 但 ρ_f 分布具有某种对称性, 用简单的方法可找到 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$ 的特解 φ'

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' + \varphi'' \\ \varphi'(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV' \end{aligned}$$

φ'' 满足 $\nabla^2 \varphi'' = 0$ 。

用分离变量法求拉普拉斯方程满足一定边界条件的解, 必须注意, 在许多情况下, 场方程的形式都是一样的。

例如, 一个位于原点的点电荷 q 产生的电势, 除原点外都满足 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。若在上述点电荷的左方放一块无穷大的接地导体板, 此时在导体板上将感应出面电荷密度 σ , 空间的场是由 σ 和 q 共同激发的, 但由于 σ 不在场方程中出现, 所以除 q 所在点外, 场方程仍为 $\nabla^2 \varphi = 0$, 与单独一个点电荷 q 产生的电势 φ 满足的方程一样。

可见, 场方程中只包含我们讨论区域内的电荷体密度, 而区域边界面上的面电荷分布甚

至区域外的电荷对区域内场的影响都没有包含在内。边界条件是反映边界面和区域外的电荷对区域内电场的影响。也即场方程在许多情况下是相同的,而视具体问题,边界条件和边值关系不同。

例如,图 1-30 中,点电荷电场的边界条件 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ 。接地导体板与点电荷的边界条件除了 $\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ 外,还有 $x=0$ 面上 $\varphi=0$ 。

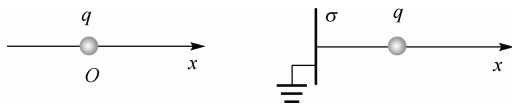


图 1-30 点电荷的电场、接地导体板与点电荷的电场

1.7.2 分离变量法求解静电场问题

1. 求解步骤

拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的通解,可用分离变量法求出。

求解步骤如下:

- (1) 按照表面和分界面的形状选择适当的坐标系(可选用直角、柱、球、极坐标系);
- (2) 分区域列出方程,并写出拉普拉斯方程在该坐标系的通解(通解数理方法中已求出,可直接写出);
- (3) 写出边界条件和边值关系(这是关键);
- (4) 根据边界条件和边值关系确定通解中的待定系数;
- (5) 讨论解的物理意义。

边界条件有两类:一类是包围待求场区域外部边界上的条件;另一类是在区域内部各分区界面上的条件。

首先,应分析外边界上的条件。

通常是求全空间的场,这时外部边界是 $r \rightarrow 0$ 与 $r \rightarrow \infty$ 两个面。边界条件通常有以下几种情况。

- (1) 若原点没有电荷,则 $r \rightarrow 0$ 处电势有限。
- (2) 若电荷分布在有限区域,则 $r \rightarrow \infty$ 处电势为零。
- (3) 若存在均匀外电场 $\mathbf{E}_z = E_0 \mathbf{e}_z$, 在无限远处, $\varphi = -E_0 z + \text{常数}$ 。

有均匀电场时,不能把电势零点选在无限远处,若选原点为电势零点,无限远处的边界条件为: $\varphi = -E_0 z$ 。在球坐标系中: $\varphi = -E_0 r \cos \theta$ 。

其次,分析区域内部各分区界面上的边值关系。

在分界面上若电场有限,则电势连续, $\varphi_1 = \varphi_2$, 在两种介质的分界面上有 $\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ 。

若存在导体,则在导体上可能有如下两个条件之一。

给定导体上的电势 φ_s 或给定导体上的总电荷 Q , 即: $Q = - \oint_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ 。

2. 球坐标下拉普拉斯方程的解

在许多静电场问题中,常遇到表面或分界面是球面,这时用球坐标系比较方便。

在球坐标系中以变量 r 、 θ 、 ϕ 表示空间任一点 M ，如图 1-31 所示。

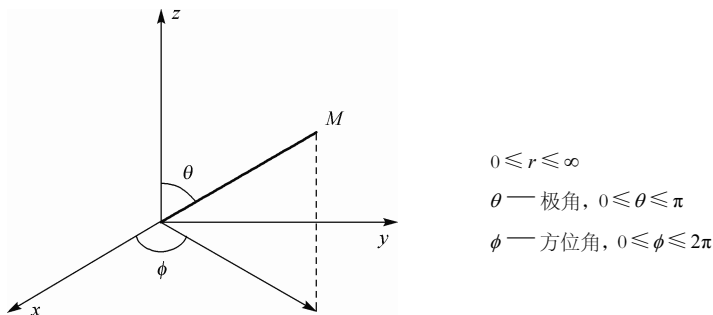


图 1-31 球坐标系

拉普拉斯方程的球坐标形式 (φ 是电势)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.7.1)$$

若所讨论的问题具有轴对称性， φ 不随方位角 ϕ 而改变。此时，方程为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.7.2)$$

方程的解

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (1.7.3)$$

式中， a_n 、 b_n 为待定常数， $P_n(\cos \theta)$ 为勒让德函数。

$$\begin{aligned} n=0 \quad P_0(\cos \theta) &= 1 \\ n=1 \quad P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ n=2 \quad P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \\ \dots \quad \dots \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

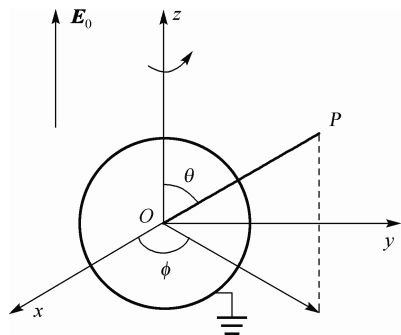


图 1-32 例 1-10 图

3. 分离变量法求解静电场问题举例

【例 1-10】 设一半径为 a 的接地导体球置于均匀外场 E_0 中，球外为真空，求电势。

解： 由于导体接地，球面电势为零，电场强度在球面上有突变，故需分球内、外为两个不同的区域。球面为分区的表面，球内电势处处为零，只需求球外区域的解。

如图 1-32 所示，球外区域的边界面为球面及无穷远面，区域内无自由电荷，满足 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

这一问题显然对通过球心平行于电场方向的直线具有旋转对称性，我们取球心为坐标原点，极轴沿着 E_0 的方向。

由于电势对极轴对称，电势 φ 与方位角 ϕ 无关，球外区域电势 φ 为

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

导体球置于均匀电场 \mathbf{E}_0 中, 球面产生感应电荷, 在球周围引起电场变化, 但球的大小是有限的, 它对外场的影响只是局部的, 可认为在无限远处电场不受影响, 仍保持原有的性质, 仍是均匀场 \mathbf{E}_0 , 所以离球极远处, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $E_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\varphi = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ 。

可写出边界条件:

(1) 在无穷远面上, 即 $r \rightarrow \infty$ 处, $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$;

(2) 在导体球面上, 即 $r \rightarrow a$ 处, $\varphi|_{r \rightarrow a} = 0$ 。

由条件 (1) 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r P_1(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty}$$

要使上式对任何 θ 值都成立, 等式两端 $P_n(\cos \theta)$ 的系数应分别相等。

因为右边 $n=1$, $P_1(\cos \theta)$, 左边也取 $n=1$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r P_1(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty}$$

又因为 $r \rightarrow \infty$, $\frac{b_1}{r^2} \rightarrow 0$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = a_1 r P_1(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r P_1(\cos \theta) |_{r \rightarrow \infty}$$

可得 $a_1 = -E_0$, $a_n = 0 (n \neq 1)$ 。

由条件 (2) 可得

$$-E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = 0$$

因为右端为零, 则要求各个 $P_n(\cos \theta)$ 的系数均为零,

$$n=1 \quad -E_0 a + \frac{b_1}{a^2} = 0$$

$$n \neq 1 \quad b_n = 0$$

则有

$$b_1 = E_0 a^3$$

最后得到球外电势

$$\varphi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \quad (1.7.5)$$

讨论解的物理意义

(1) 球外电势 φ 由两部分组成, 一部分是均匀电场的电势 $-E_0 r \cos \theta$, 另一部分是球面上感应电荷激发的电势 $\frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta$, 电偶极矩为 \mathbf{p} 的偶极子激发的电势为 $\frac{\mathbf{p} \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

$$\frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta = \frac{4\pi \varepsilon_0 E_0 a^3 \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$$

可见, 球面上感应电荷激发的电场相当于在球心放置一电偶极子 $\mathbf{p} = 4\pi \varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$ 激发的电场, 也即球外电场为一个电偶极子电场叠加在均匀场 \mathbf{E}_0 上, 即球面上感应电荷对球外电场的影响相当于一个位于球心的电偶极子。

(2) 球面上感应电荷面密度

$$\sigma_f = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

感应电荷面密度与 $\cos \theta$ 有关, 当 $\theta=0$ 时, σ_f 最大, 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $\sigma_f=0$ 。

【例 1-11】 电容率为 ε , 半径为 a 的介质球置于均匀外电场 \mathbf{E}_0 中, 求电势分布。

解: 介质球在外电场中极化, 在它表面产生极化电荷, 这些极化电荷激发的电场叠加在原外电场 \mathbf{E}_0 上, 得到总电场。

本题求解区域的边界面为 $r=0$ 点和无穷远面, 不同介质的分界面为球面。

取球心为球坐标的原点, 极轴沿 \mathbf{E}_0 的方向。

介质球的存在使空间分为两个区域: 球内区和球外区。两区域内部都没有自由电荷, 电势 φ 都满足拉普拉斯方程。显然, 球内和球外的电势是不同的。

设 φ_1 为球外电势, 球外为真空, φ_2 为球内电势。

两区域的通解为

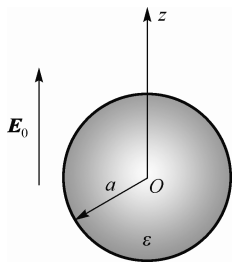


图 1-33 例 1-11 图

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (r > a)$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (r < a)$$

(1) 无穷远处 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_0$, $\varphi = -E_0 r P_1(\cos \theta)$ 。

(2) $r=0$ 处 φ_2 应为有限值。

(3) 在介质球面上 ($r=a$) $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$ 。

由条件 (1) 可得

$$a_1 = -E_0, \quad a_n = 0 (n \neq 1)$$

由条件 (2) 可得

$$d_n = 0$$

由条件 (3) $\varphi_1 = \varphi_2$ 可得

$$-E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(\cos \theta)$$

由 $\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$ 可得

$$-E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)b_n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} n c_n a^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

比较 $P_1(\cos\theta)$ 的系数

$$\begin{aligned} -E_0 a + \frac{b_1}{a^2} &= c_1 a \\ -E_0 - \frac{2b_1}{a^3} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} c_1 \end{aligned}$$

比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数 ($n \neq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{a^{n+1}} &= c_n a^n \\ -\frac{(n+1)b_n}{a^{n+2}} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} n c_n a^{n-1} \end{aligned}$$

可解出

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 a^3 \\ c_1 &= -\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \\ b_n = c_n &= 0 \quad (n \neq 1) \end{aligned}$$

本题的解为

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{E_0 a^3 \cos\theta}{r^2} \quad (1.7.6)$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos\theta \quad (1.7.7)$$

由 φ_2 可得球内电场为

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \mathbf{E}_0 \quad (1.7.8)$$

讨论解的物理意义

(1) 因为 $\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}$ 总小于 1, 所以球内电场比原外电场 \mathbf{E}_0 弱。这是由于介质极化后在上半球面产生正极化电荷, 在下半球面产生负极化电荷, 因而在球内极化电荷激发的电场与原外电场 \mathbf{E}_0 反向, 使总电场减弱。极化电荷产生的场称为退极化电场, 用 \mathbf{E}_p 表示

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_0 \quad (1.7.9)$$

将式 (1.7.8) 的结果代入可得

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_0 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \mathbf{E}_0 \quad (1.7.10)$$

在球内总电场作用下, 介质的极化强度为

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (1.7.11)$$

\mathbf{P} 为常数, 说明介质球均匀极化。

退极化电场 \mathbf{E}_p 与极化强度矢量 \mathbf{P} 成正比, 定义为

$$\mathbf{E}_p = -\frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (1.7.12)$$

式中, 负号表示退极化电场 \mathbf{E}_p 总是与极化强度矢量 \mathbf{P} 方向相反, N 为比例系数, 称为退极化因子。通常 $N \leq 1$, N 与电介质试样的形状有关。在球内, 电介质均匀极化

$$N = -\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}_p}{\mathbf{P}} = \frac{1}{3}$$

即介质球的 $N = \frac{1}{3}$, 常用的介质平板 $N = 1$, 介质圆柱 $N = \frac{1}{2}$ 。

介质球的总电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 4\pi \varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$$

(2) φ_1 中第一项为均匀外场的电势, 第二项

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{\mathbf{E} a^3 \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

\mathbf{p} 正好等于 $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 4\pi \varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$ 。其中第二项正好是介质球的总偶极矩激发的电势。介质球由于极化而出现的极化电荷对于球外区域, 相当于一个位于球心的电偶极矩。

(3) 从 φ_1 、 φ_2 的表达式, 当 $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \rightarrow 0$ 时 (相当于 $\varepsilon \rightarrow \infty$)

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}$$

$$\varphi_2 = 0$$

与例 1-10 结果相同, 这表示当介质的相对电容率趋于 ∞ 时, 其效果相当于导体。

(4) 因介质球均匀极化, 所以极化电荷体密度 $\rho_p = 0$, 极化电荷面密度

$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

显然, 由于 $\varepsilon \neq \varepsilon_0$, 所以介质球面上才有极化电荷, 并形成按 $\cos \theta$ 变化的分布, 所以对球外区域才表现为等效电偶极子。

【例 1-12】 一个内径和外径分别为 R_2 和 R_3 的导体球壳, 带电荷 Q 。同心地包围着一个半径为 R_1 的导体球 ($R_1 < R_2$), 使这个导体球接地。求空间各点的电势和这个导体球的感应电荷。

解: 此问题除球壳上, 空间无自由电荷, 即壳外、壳内无自由电荷, 则壳内、壳外均满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。

此问题具有球对称性。电势 φ 不依赖于角度 θ 、 ϕ , 因此可以只取通解中 $n=0$ 的项。

设导体壳内和壳外的电势为

$$\text{壳外} \quad \varphi_1 = a + \frac{b}{r} \quad (r > R_3)$$

壳内
$$\varphi_2 = c + \frac{d}{r} \quad (R_2 > r > R_1)$$

本题的边界条件与边值关系为

(1) 因内导体球接地 $\varphi_2|_{r=R_1} = \varphi_1|_{r \rightarrow \infty} = 0$;

(2) 因整个导体球壳为等势体 $\varphi_2|_{r=R_2} = \varphi_1|_{r=R_3}$;

(3) 球壳带总电荷 Q , 因而 $-\oint_{S_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} dS + \int_{S_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$, 其中 S_3 为 $r=R_3$ 的球面, S_2 为 $r=R_2$ 的球面。

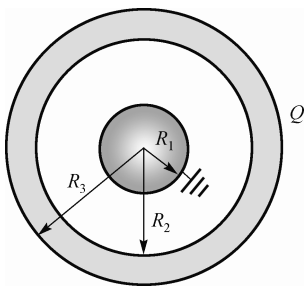


图 1-34 例 1-12 图 1

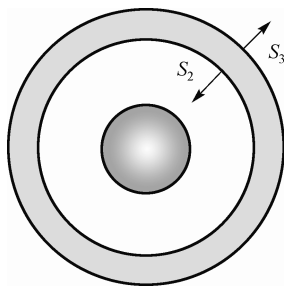


图 1-35 例 1-12 图 2

将 φ_1 、 φ_2 代入边界条件

由 (1) 可得
$$a = 0, \quad c + \frac{d}{R_1} = 0$$

由 (2) 可得
$$c + \frac{d}{R_2} = \frac{b}{R_3}$$

由 (3) 可得
$$b - d = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

可联立求解出 c 、 b 、 d 。

$$c = -\frac{d}{R_1}, \quad -\frac{d}{R_1} + \frac{d}{R_2} = \frac{b}{R_3}, \quad b = -R_3 d \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$b - d = -R_3 d \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - d = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$d \left[-R_3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - 1 \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$d = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[R_3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right]^{-1}$$

令
$$-\left[R_3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right]^{-1} Q = Q_1$$

$$d = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$c = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

则有

$$\varphi_1 = \frac{b}{r} = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi_2 = c + \frac{d}{r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right)$$

导体球上的感应电荷为

$$-\epsilon_0 \oint_{S_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} dS = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=R_1} 4\pi R_1^2 = Q_1$$

【例 1-13】 半径为 R_0 的均匀介质球的中心置一点电荷 Q_f , 球的电容率为 ϵ , 球外为真空。试用分离变量法求空间电势。

解: 本题用高斯定理很易解决, 本例的目的在于说明用分离变量法时仍可用场的叠加原理, 以及用叠加原理时该注意的问题。

空间的电场是自由点电荷 Q_f 、它引起介质球极化后而产生的极化点电荷 Q_p 及面极化电荷 σ_p 共同激发的。因为 Q_f 和 Q_p 是点电荷, 所以描述它们产生的电场的电势 φ' 满足泊松方程。而面极化电荷产生的电势 φ'' 满足拉普拉斯方程。

空间的电势 $\varphi = \varphi' + \varphi''$ 。

Q_f 和 Q_p 是位于同一点的两个点电荷, 它们产生的电势

$$\varphi' = \frac{Q_f + Q_p}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在均匀介质中有

$$Q_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q_f$$

$$Q_f + Q_p = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q_f$$

则

$$\varphi' = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r}$$

显见 ϵ 包括了极化电荷的影响。

φ'' 满足拉普拉斯方程, 可用分离变量法求解。

因为 σ_p 均匀分布在介质球面上, 所以 φ'' 是球对称的, 仅与 r 有关 (只取 $n=0$ 的项), 球内、外的电势分别为

$$\varphi_1'' = a + \frac{b}{r}; \quad \varphi_1 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + a + \frac{b}{r} \quad (r > R_0)$$

$$\varphi_2'' = c + \frac{d}{r}; \quad \varphi_2 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + c + \frac{d}{r} \quad (r < R_0)$$

边界条件和边值关系为

(1) $r \rightarrow \infty$ 处, $\varphi_1 \rightarrow 0$;

(2) $r \rightarrow 0$ 处, φ_2'' 有限;

(3) $r = R_0$ 处, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{R_0} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{R_0}$ 。

将(1)代入 φ_1 , 可得 $a = 0$ 。

将(2)代入 φ_2'' , 可得 $d = 0$ 。

$$\varphi_1(R_0) = \varphi_2(R_0) \quad \text{可得} \quad \frac{b}{R_0} = c$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{R_0} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{R_0} \quad \text{可得} \quad -\frac{\epsilon_0 b}{R_0^2} - \frac{\epsilon_0 Q_f}{4\pi\epsilon R_0^2} = -\frac{Q_f}{4\pi R_0^2}$$

以上两式联立可解出

$$b = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon} Q_f$$

$$c = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} Q_f$$

则有

$$\varphi_1 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} Q_f = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r > R_0$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{(\epsilon - \epsilon_0)Q_f}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} \quad r < R_0$$

【例 1-14】 如图 1-36 所示, 一对半无限的平行板接地, 相距为 b , 左端有一极板电势为 V , 求两平行板之间的电势。

解: 这个问题选直角坐标系, 电势 φ 与 z 无关, 拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

令: $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$

分离变量后可得到两个方程

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - k^2 X(x) = 0$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k^2 Y(y) = 0$$

式中, k^2 是常数, 上述方程的解为

$$X(x) = Ge^{kx} + He^{-kx}$$

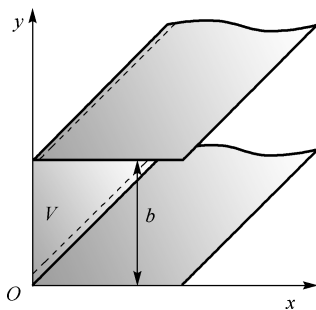


图 1-36 例 1-14 图

$$Y(y) = A \sin ky + B \cos ky$$

$$\varphi = X(x)Y(y) = (A \sin ky + B \cos ky)(G e^{kx} + H e^{-kx})$$

边界条件和边值关系为

(1) $y=0$ 和 $y=b$ 时, $\varphi=0$;

(2) $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi=0$;

(3) $x=0$ 时, $\varphi=V$ 。

由 $y=0$ 时, $\varphi=0$, 可得 $B=0$ 。

由 $y=b$ 时, $\varphi=0$, 可得 $kb=n\pi$, $k=\frac{n\pi}{b}$ ($n=1,2,\dots$)。

由 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi=0$, 可得 $G=0$ 。

则有
$$\varphi = C \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{n\pi}{b}x} \quad (1.7.13)$$

但式 (1.7.13) 不可能满足边界条件 $x=0$ 时, $\varphi=V$ 。

当 $x=0$ 时, $\varphi = C \sin \frac{n\pi y}{b}$, $C=AH$ 。

这是因为上式只取了一个 n 值, 还有其他 n 值的解没有包括进来, 因此普遍解应是式 (1.7.13) 解的线性组合:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{n\pi}{b}x}$$

式中, C_n 由边界条件 $x=0$ 、 $\varphi=V$ 来确定。代入此条件有

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b}$$

在上式两端乘以 $\sin \frac{m\pi y}{b}$, 并对 y 从 0 到 b 积分

$$\int_0^b V \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dy$$

利用
$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{b}{2} & (n = m) \end{cases}$$

得到

$$C_m = \frac{2}{b} \int_0^b V \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{4V}{m\pi} & (m \text{ 为奇数}) \\ 0 & (m \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

最后求得

$$\varphi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b} e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{b}} \quad (m \text{ 为奇数时的情况})$$

4. 分离变量法解题思路

(1) 分离变量法求解区域中介质分区均匀, 且区域内没有自由电荷, 或自由电荷只出现在区域的边界上 (如自由电荷只出现在一些导体表面)。

(2) 在求解区域内 $\rho_f \neq 0$, 但是 ρ_f 具有某种对称性。很容易找到 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$ 的特解。

总电势 $\varphi = \varphi' + \varphi''$, $\nabla^2 \varphi'' = 0$, φ' 为特解, 例如:

点电荷
$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电偶极子
$$\varphi' = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$$

求解步骤归纳如下。

(1) 分析场源的分布情况, 确定满足拉普拉斯方程的求解区域。

(2) 根据区域的边界对称性选择适当的坐标系。例如, 球形界面选用球坐标。若问题具有旋转对称性时, 可选用球坐标, 并取对称轴为坐标系的极轴。

(3) 分区写出该坐标系中拉普拉斯方程的通解。

(4) 分析并列问题的边界条件。包括第一类或第二类边界条件, 不同介质交界面的边值关系, 以及自然边界条件。

(5) 利用边界条件确定待定系数, 得到拉普拉斯方程满足所给定边界条件的解。

(6) 讨论解的物理意义。

1.8 有限差分法

求解电磁场边值问题的方法原则上可以分为两大类: 第一类是解析法, 如分离变量法、电像法、格林函数法等, 解析法只能求解边界形状简单的情况; 第二类是数值计算法, 对于边界形状复杂的问题, 求出解析解很困难甚至是不可能的, 这时必须采用数值计算法求解, 可以得到精度很高的近似解。计算机技术的迅速发展, 为数值计算法提供了有效的计算工具。有限差分法是常用的一种求解电磁场边值问题的数值计算方法, 它是以差分原理为基础的一种近似解法。有限差分法实质上是用各离散点上函数的差商来近似替代该点的偏导数, 将原来用连续变量形式表示的偏微分方程, 转化为以离散变量形式表示的差分方程组, 由此联立解出各个离散点上的待求函数值, 便得所求边值问题的数值解。这种方法不受边界形状的限制, 能解决许多解析法无法求解的问题, 其缺点是计算工作量大。本节只简单介绍这种方法的基本原理。

1.8.1 差分方程

差分方程的具体形式与选用的坐标系、离散点的分布形状及具体边界条件有关。

图 1-37 所示为由矩形边界所限定的二维场域内的静电场。首先, 将场域划分成若干矩形网格, 所以有限差分法又称网格法。场域网格线的交点称为节点, 网格线与边界的交点称为边界节点。网格线间距离 (也称步长) 为 h 和 l 。

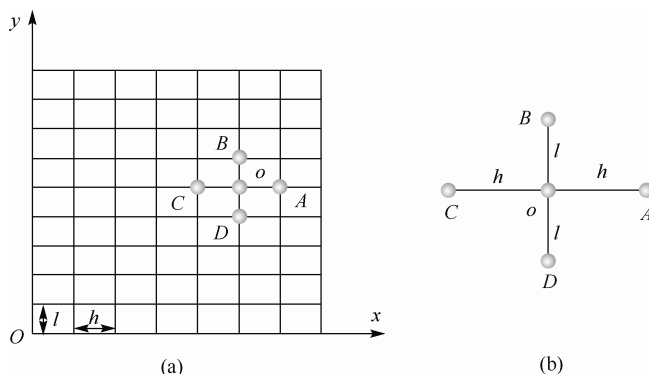


图 1-37 二维场域网格

场域内任一节点 o 的电势都满足泊松方程，在直角坐标系中可写为

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} \quad (1.8.1)$$

式中， ρ_0 为 o 点的电荷密度，由给定的电荷分布情况决定。若该处无电荷分布，式 (1.8.1) 变为拉普拉斯方程。节点 o 只与周围 4 个节点相关联，这 4 个节点 A 、 B 、 C 和 D 的电势可利用泰勒级数对 o 点展开，得到

$$\varphi_A = \varphi_0 + h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 + \dots$$

$$\varphi_B = \varphi_0 + l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + \frac{l^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 + \frac{l^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right)_0 + \dots$$

$$\varphi_C = \varphi_0 - h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_0 + \dots$$

$$\varphi_D = \varphi_0 - l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 + \frac{l^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 + \frac{l^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right)_0 + \dots$$

将以上第 1 式和第 3 式相加、第 2 式和第 4 式相加后分别得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\varphi_A - 2\varphi_0 + \varphi_C}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\varphi_B - 2\varphi_0 + \varphi_D}{l^2} + o'(l^2)$$

式中， $o(h^2)$ 和 $o'(l^2)$ 表示其余各 4 阶以上的偏导数项之和，当网格间距 h 和 l 选得很小时，可忽略不计，此时误差数量级为 h^2 （或 l^2 ）。略去 $o(h^2)$ 和 $o'(l^2)$ 项以后，剩下的项 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0$ 和

$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0$ 就是用二阶中心平均差商代替二阶偏导数的近似表达式，代入式 (1.8.1) 后，可得节

点 o 的差分方程式。若网格划分成正方形，则 $h=l$ ，代入式 (1.8.1) 后得到差分方程

$$\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D - 4\varphi_0 = -h^2 \frac{\rho_0}{\varepsilon} \quad (1.8.2a)$$

$$\text{或} \quad \varphi_0 = \frac{1}{4} \left[\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D + h^2 \frac{\rho_0}{\varepsilon} \right] \quad (1.8.2b)$$

对无源情况 ($\rho_0 = 0$), 则式 (1.8.2b) 变换为

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} (\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D) \quad (1.8.2c)$$

式 (1.8.2c) 为拉普拉斯方程的差分方程形式。式 (1.8.2) 说明场域划分为正方形网格后, 场域内部任一节点 o 的电势 φ_0 只与周围 4 个节点的电势有关。式 (1.8.2) 正是最常用的节点电势差分方程式, 称为等间距 5 点平均差分格式。

1.8.2 差分方程组的求解

对于第一类边值问题, 由于边界节点上的电势值全部给定, 不必再写出这些边界节点的电势差分方程。整个差分方程组的个数等于场域内部节点的个数。内部节点势函数的值均为待求量, 可按式 (1.8.2) 列出这些势函数的差分方程组。这样, 未知量的数目等于差分方程的个数, 故差分方程组必有定解。

对于第二类边值问题, 已知边界 L 上的电势梯度; 边界节点的电势值尚待求解。如果边界线 L 与网格相重叠 (如图 1-38 所示), 设想待求场域向左延拓, 在边界线左侧存在一系列虚拟节点, 如图中 C 便是虚拟节点。因为边界上的电势梯度已知, 假定边界节点 o 的电势梯度为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_0 = K$$

用一阶差商代替一阶偏导数后有:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_0 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{2h} = K$$

由此可求出虚拟节点 C 处的电势为

$$\varphi_C = \varphi_A - 2hK$$

按式 (1.8.2c) 写出边界点 o 的电势差分方程, 并将其中 φ_C 用上式代入后, 得边界节点 o 上的电势差分方程为

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} [2\varphi_A + \varphi_B + \varphi_D - 2hK] \quad (1.8.3)$$

可见, 边界节点 o 的电势方程未引入新的未知量, 因此对于第二类边值问题, 内部节点上待求势函数仍按式 (1.8.2b) 的格式列写差分方程, 边界节点上待求势函数则按式 (1.8.3) 格式列写差分方程, 差分方程的个数与未知函数的个数相同, 整个差分方程组必定有解。

以第一类边值问题为例。用有限差分法求解时, 首先将场域按精度要求划分为足够多的正方形网格, 如图 1-39 所示。根据编写计算程序的需要, 每一网格节点的位置由双下标 (i, j)

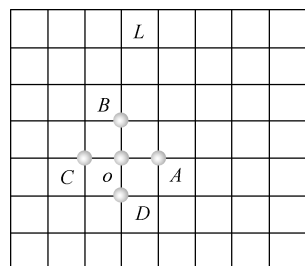


图 1-38 平面场域

识别, i 和 j 分别为节点所对应的横坐标和纵坐标, 这样差分方程式 (1.8.2b) 可表示为:

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{4} \left[\varphi(i+1, j) + \varphi(i, j+1) + \varphi(i-1, j) + \varphi(i, j-1) + h^2 \frac{\rho_{ij}}{\varepsilon} \right] \quad (1.8.4)$$

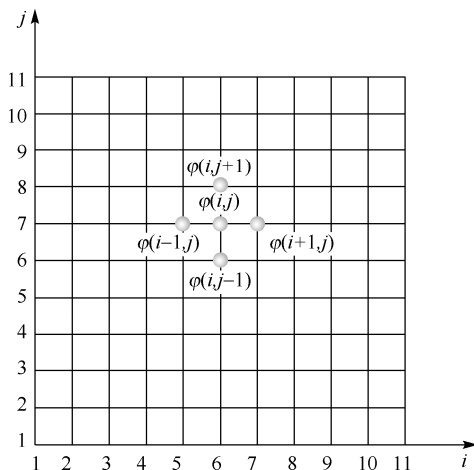


图 1-39 网格划分

下面介绍几种数值解法的步骤。

1. 迭代法

(1) 先对每一网格点任意设置初始值。

(2) 根据有限差分方程 (1.8.4), 规定域中各点每次用围绕其周围的邻接点的电势平均值作为新算出的电势值。如果已知第 n 次电势值, 则计算第 $n+1$ 次电势值的表示式为

$$\varphi^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} \left[\varphi^n(i+1, j) + \varphi^n(i, j+1) + \varphi^n(i-1, j) + \varphi^n(i, j-1) + h^2 \frac{\rho_{ij}}{\varepsilon} \right] \quad (1.8.5)$$

(3) 连续逐点计算, 直至每一点前一次的电势值与后一次新算出的电势值相差满足要求的精度为止。这时各电势值就是所求的解。

2. 松弛法 (高斯-赛德尔迭代法)

上述迭代法的主要缺点是收敛速度慢。每点算得新值后不能立即冲掉旧值, 后者在计算后面邻接点的电位值时还要用到。如果将前述迭代法稍加改进, 在计算每个网点电势时充分利用已经得到的新值, 以使得每点新值时立即把旧值冲掉, 这种方法称为松弛法。松弛法计算网点电势公式是

$$\varphi^{n+1}(i, j) = \frac{1}{4} \left[\varphi^n(i+1, j) + \varphi^n(i, j+1) + \varphi^{n+1}(i-1, j) + \varphi^{n+1}(i, j-1) + h^2 \frac{\rho_{ij}}{\varepsilon} \right] \quad (1.8.6)$$

由于更新值的提前使用, 松弛法比前述迭代法收敛可加快一倍, 存储量也可以减少。但为进一步加快收敛速度, 可采用下述方法。

3. 超松弛迭代法

在用式 (1.8.6) 计算 $\varphi^{n+1}(i, j)$ 时, 将该节点上的新老两值之差乘以一个 α 因子后, 再加

到老计算值上, 作为 $\varphi^{n+1}(i, j)$ 表示式是

$$\varphi^{n+1}(i, j) = \varphi^n(i, j) + \frac{\alpha}{4} \left[\varphi^n(i+1, j) + \varphi^n(i, j+1) + \varphi^{n+1}(i-1, j) + \varphi^{n+1}(i, j-1) + \frac{h^2 \rho_{ij}}{\varepsilon} - 4\varphi^n(i, j) \right] \quad (1.8.7)$$

式中, 加速收敛因子 α 决定了超松弛的程度, 从而影响迭代收敛的速度。 α 的取值范围是 $1 \leq \alpha < 2$, 当 $\alpha = 1$ 时, 式 (1.8.7) 变成式 (1.8.6), 即高斯-赛德尔迭代法; 当 $\alpha \geq 2$ 时, 迭代过程将不收敛。

对于第一类边值问题, 正方形场域由正方形网格划分, 当每边节点数为 $(p+1)$ 时, 最佳收敛因子 α_0 为

$$\alpha_0 = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \quad (1.8.8)$$

若矩形场域由边长为 h 的正方形网格划分, 场域的边长分别为 ph 和 qh , 且 p 和 q 都很大 (>15) 时, 最佳收敛因子为

$$\alpha_0 = 2 - \pi\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}} \quad (1.8.9)$$

【例 1-15】 设一长直接地金属槽的正方形横截面如图 1-40 所示, 边长为 a , 其侧壁与底面电势均为零, 顶盖电势的相对值为 10V。求槽中间各节点的电势。

解: 本例为第一类边值问题, 场域内电势满足拉普拉斯方程, 解题步骤如下:

(1) 将区域进行分格, 如图 1-40 所示, 步距 $h = a/4$, x 、 y 方向的等分数均为 $p = 4$, 正方形区域划分为 16 个网格, 25 个节点。其中边界节点 16 个, 内节点 9 个。由于此例仅为说明解题方法, 故只进行了很粗的分格, 实际问题中, 网格须分得较细才能得到较高的精度。

(2) 给出采用超松弛迭代法的差分方程, 按式 (1.8.7) 即可得差分方程的迭代运算形式为

$$\varphi^{n+1}(i, j) = \varphi^n(i, j) + \frac{\alpha}{4} \left[\varphi^n(i+1, j) + \varphi^n(i, j+1) + \varphi^{n+1}(i-1, j) + \varphi^{n+1}(i, j-1) - 4\varphi^n(i, j) \right]$$

式中, 加速收敛因子 α 根据本例场域划分情况 ($p = 4$) 可由式 (1.8.8) 求得 $\alpha_0 = 1.17$ 。

(3) 由题意给出 16 个边界节点的边界条件

$$\varphi_1(1, 1 \sim 5) = \varphi_1(2 \sim 4, 1) = \varphi_1(5, 1 \sim 5) = 0, \quad \varphi_2(2 \sim 4, 5) = 10V$$

(4) 在计算机程序求解迭代方程时, 给定 9 个内节点的未知电势初值为 0 值。

(5) 给定迭代解收敛的指标, 当各网格内点相邻二次迭代近似值的绝对误差的绝对值均小于 $DF = 10^{-6}$ 时, 终止迭代循环。

(6) 按图 1-41 所示的计算框图, 采用 C 语言编写本例计算程序。

(7) 图 1-42 为迭代次数 $N=1$ 、2、5 及收敛时 $N=10$ 域内各节点电势的数值解结果。由此可以看出, 各内节点电势值按给定的超松弛迭代法的差分方程遵循规定的迭代顺序依次变化, 且收敛解关于中线左右对称。

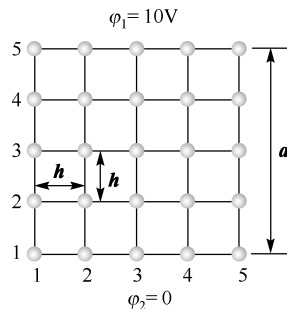


图 1-40 例 1-15 图 1

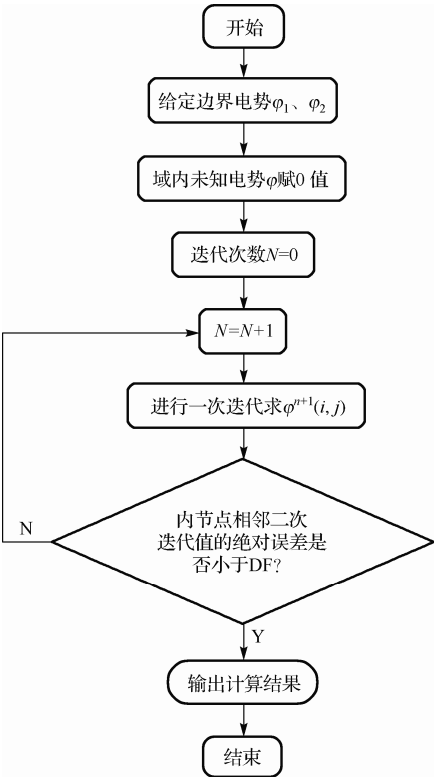


图 1-41 例 1-15 图 2

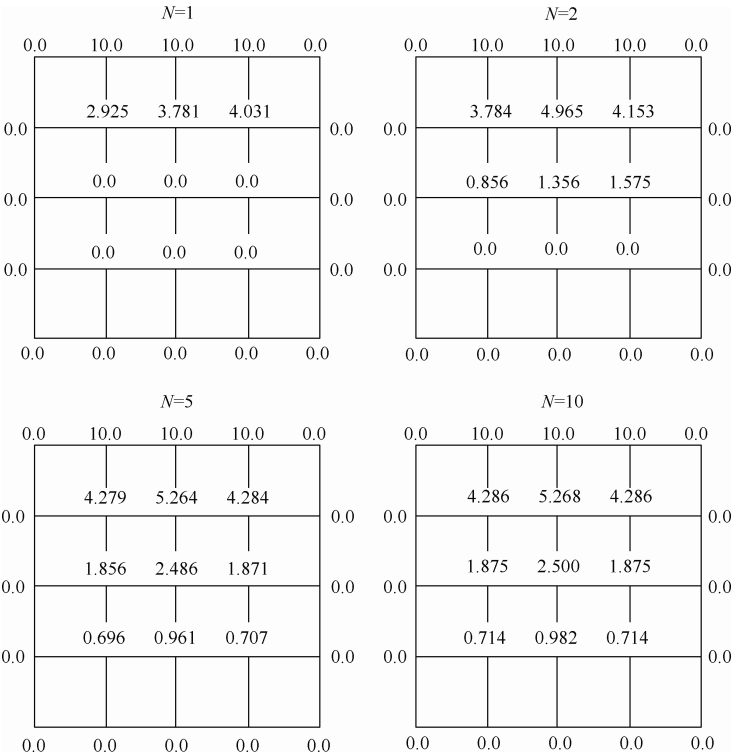


图 1-42 电势 φ 的数值解

1.9 电 多 极 矩

1.9.1 电势的多级展开

设在体积为 V 的区域内有电荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ ，取区域内一点 O 为坐标原点，如图 1-43 所示，此电荷在空间激发的电势

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

在许多物理问题中，电荷 $\rho(\mathbf{r}')$ 只分布于一个小区域内，而观测点又距电荷 $\rho(\mathbf{r}')$ 比较远，即 $|\mathbf{r}| \gg l$ (l 为区域 V 的线度)。由于 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg l$ ，必定有 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ ，因此可把上式中的 $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 在 $\mathbf{r}' = 0$ 点进行泰勒展开，由此得出 ϕ

的各级近似值。例如，原子核的电荷分布于 $\sim 10^{-15}$ m 线度范围内，而原子内的电子到原子核的距离 $\sim 10^{-10}$ m，因此原子核作用到电子上的电场可用本节的方法，求得各级近似值。

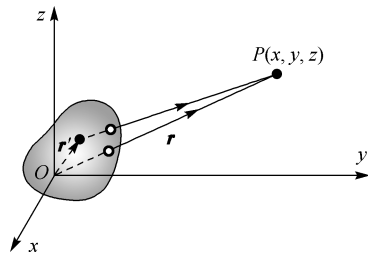


图 1-43 连续电荷电势分布

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

\mathbf{r}' 在区域内变动。 $l \ll |\mathbf{r}|$ 或 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ 可把 \mathbf{r}' 视为小参量，把 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 的函数对 \mathbf{r}' 展开。

设 $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 为 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 的任一函数。在 $\mathbf{r}' = 0$ 点附近， $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 的展开式为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= f(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^3 r'_i \frac{\partial}{\partial r_i} f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} f(\mathbf{r}) + \cdots \\ &= f(\mathbf{r}) - \mathbf{r}' \cdot \nabla f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{r}) + \cdots \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

取 $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ，则

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} + \cdots \quad (1.9.2)$$

将 $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 展开式代入 $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$ ，可得

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} + \cdots \right] dV' \\ &= \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) + \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) + \cdots \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

式中

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.9.4)$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} dV' \quad (1.9.5)$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2!} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} dV' \quad (1.9.6)$$

上式是电荷体系激发的电势在远处的多级展开式。

1.9.2 电多极矩

下面讨论电势多极展开式 (1.9.3) 各项的物理意义。

第一项

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$$

令:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$$

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.9.7)$$

Q 是电荷体系的总电荷, $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$ 就等于体系的总电荷集中于原点的点电荷的电势。因此作为第一级近似, 可以把电荷体系视为集中于原点上的点电荷, 它激发的电势用 $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$ 表示。

例如, 电离的原子或分子, 它们在远处的电势就决定于 $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$ 。

第二项

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} dV'$$

若令

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad (1.9.8)$$

\mathbf{p} 称为体系的电偶极矩, 则

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.9.9)$$

$\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ 称为电偶极势, 表示位于原点的电偶极矩 \mathbf{p} 产生电势。

由 \mathbf{p} 的定义式可知, 如果一个电荷体系的电荷分布关于原点对称, 即 $\rho(\mathbf{r}') = \rho(-\mathbf{r}')$, 则

$$\int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' = -\int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' = 0$$

此时不存在电偶极矩, 电荷球对称分布的体系, 属于这种情形。只有对原点不对称的电荷分布, 才有电偶极矩。

电偶极矩一般与电荷分布及其原点选择有关, 只有中性电荷体系, 电偶极矩才与原点选择无关。

对于一个点电荷 q , 当原点选在 q 所在点时, 则电偶极矩为零。当原点选在另外的任一空间点时, 电偶极矩不为零。

如图 1-44 所示点电荷 q , 当原点选在 q 点时, $\mathbf{r}' = 0$, $\mathbf{p} = 0$;
当原点选在空间任一点, $\mathbf{r}' \neq 0$, $\mathbf{p} = q\mathbf{r}'$ 。

对连续分布的电荷体系

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad (1.9.10a)$$

对点电荷系

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i \quad (1.9.10b)$$

中性电荷体系, 总电荷为零, 电偶极矩不为零的最简单的电荷体系是一对正、负点电荷。

设 \mathbf{r}' 点上有一点电荷 q , $-\mathbf{r}'$ 点上有一点电荷 $-q$, 由定义 $\mathbf{p} = 2q\mathbf{r}' = q\mathbf{l}$, 如图 1-45 所示, 具有偶极矩 $p_z = ql$ 的电偶极子产生的电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

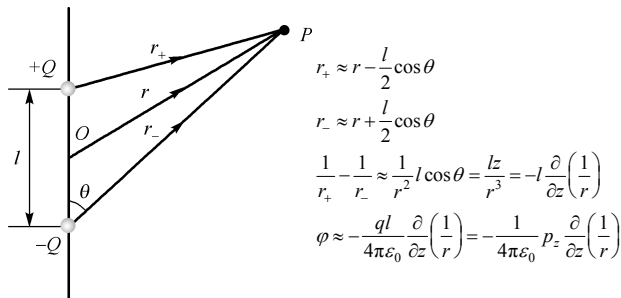


图 1-45 电偶极子的电势

由图 1-45, 若 $l \ll r$, 定义与 $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ 定义式 (1.9.5) 相符。

展开式的第三项

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2!} \sum_{ij} r'_i r'_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} dV'$$

令

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int_V 3r'_i r'_j \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.9.11)$$

\mathcal{Q}_{ij} 是电荷体系的电四极矩, \mathcal{Q}_{ij} 是对称张量。

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{Q}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} \quad (1.9.12)$$

是电四极矩 \mathcal{Q}_{ij} 产生的电势。

现在讨论 \mathcal{Q}_{ij} 分量的物理意义。

最简单的电四极矩是由一对正、负电偶极子组成的, 如图 1-46 所示。

设正电荷位于 $z = \pm b$, 负电荷位于 $\pm a$, 体系的总电荷为零, 总电偶极矩为零, 体系的电四极矩由 $\mathcal{Q}_{ij} = \int_V 3r'_i r'_j \rho(\mathbf{r}') dV'$ 算出。

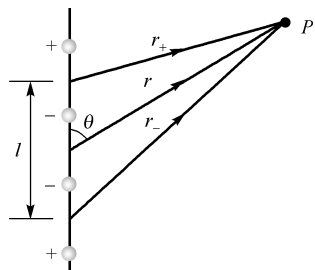


图 1-46 电四极矩的电势

由于电荷位于 z 轴上, $\mathcal{Q}_{ij}=0$, $i \neq j$, 并且 $\mathcal{Q}_{11}=\mathcal{Q}_{22}=0$, 即 $\mathcal{Q}_{xx}=\mathcal{Q}_{yy}=0$, 仅有 \mathcal{Q}_{33} 即 \mathcal{Q}_{zz} 分量

$$\mathcal{Q}_{33}=3qb^2+3q(-b)^2-3qa^2-3q(-a)^2=6q(b^2-a^2)=6q(b-a)(b+a)$$

由图 1-46 知, $l=b+a$ 是两个偶极子中心的距离。 $p=q(b-a)$ 是其中一对电荷的电偶极矩, 则 $\mathcal{Q}_{33}=6pl$ 。

这一电荷体系产生的电势是一对反向电偶极子所产生的电势的叠加。

电偶极子的电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}$$

则有

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r_-} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\approx -l\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}$$

则有

$$\varphi\approx\frac{1}{4\pi\epsilon_0}pl\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\mathcal{Q}_{zz}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r}$$

与 $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{ij}\mathcal{Q}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\frac{1}{r}$ 相符。

同理, 仅有 \mathcal{Q}_{11} 分量的最简单的电荷体系为 x 轴上两对正、负电荷组成, 仅有 \mathcal{Q}_{22} 分量的最简单的电荷体系为 y 轴上两对正、负电荷组成, 仅有 \mathcal{Q}_{12} 分量的最简单的电荷体系为 xOy 平面上两对正、负电荷组成, 余类推, 如图 1-47 所示。

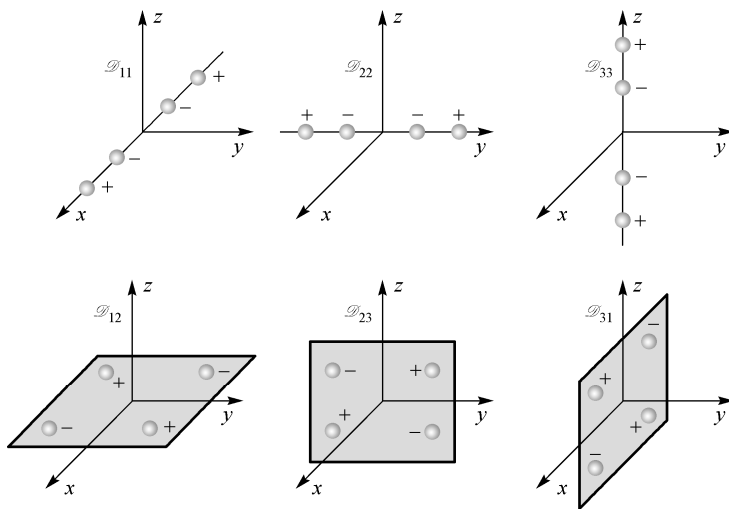


图 1-47 不同电四极矩分量的电荷分布

下面证明电四极矩只有 5 个独立分量。

电四极矩 \mathcal{Q}_{ij} 是对称张量。

$\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{Q}_{ji}$ 对称张量有 6 个独立分量。但可以证明： $\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = 0$ ，即 \mathcal{Q}_{ij} 只有 5 个独立分量。

证明：当 $r \neq 0$ 时， $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$

引入克朗乃克 (Kronecker) 记号 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j=1, 2, 3)$

展开式的第三项 $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ 可以写成：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{ij} [(3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV'] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r}$$

重新定义电四极矩张量

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.9.13)$$

则 $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ 仍写为

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{Q}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r} \quad (1.9.14)$$

现在定义的 \mathcal{Q}_{ij} 满足 $\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = 0$

$$\mathcal{Q}_{11} = \int (3x'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathcal{Q}_{22} = \int (3y'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathcal{Q}_{33} = \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = \int (3x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 - 3r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV' = 0$$

得证。

$\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = 0$ 在计算电四极矩张量 \mathcal{Q}_{ij} 时经常用到。

注意一些特殊情况：

(1) 若电荷分布具有球对称性

$$\int_V x'^2 \rho(\mathbf{r}') dV' = \int_V y'^2 \rho(\mathbf{r}') dV' = \int_V z'^2 \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{3} \int_V r'^2 \rho(\mathbf{r}') dV'$$

则有

$$\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22} = \mathcal{Q}_{33} = 0$$

而且

$$\mathcal{Q}_{12} = \mathcal{Q}_{23} = \mathcal{Q}_{31} = 0$$

因此，对于球对称分布的电荷体系，没有电四极矩，没有各级电多极矩，球外电场和集中在球心的点电荷电场一样。

(2) 若电荷分布具有轴对称性 $\mathcal{Q}_{ij} = 0 (i \neq j)$

由于 $\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = 0$ ，此时只有两位独立分量。

若电荷体系对某一轴对称，如对 z 轴对称： $\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22}$ ，则仅有一个独立分量： $2\mathcal{Q}_{11} = -\mathcal{Q}_{33}$
如设 $\mathcal{Q}_{33} = \mathcal{Q}$ ，则

$$\mathcal{D} = \mathcal{Q} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right) \quad (1.9.15)$$

【例 1-16】求面电荷密度按 $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ 分布的半径为 a 的球的电偶极矩。该系统是否存在电四极矩？

解：1. 电荷体系的电偶极矩 $\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$

由于电荷分布于球面上 $\mathbf{p} = \int \sigma(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dS$

球坐标系 (r, θ, ϕ) 与直角坐标系 (x, y, z) 变换方程为

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

电偶极矩 \mathbf{p} 的分量式

$$p_x = \int \sigma x dS$$

$$p_y = \int \sigma y dS$$

$$p_z = \int \sigma z dS$$

球坐标系面积元 $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

将 x 、 y 、 z 及 dS 代入 p_x 、 p_y 、 p_z ，即可求出 \mathbf{p} 的各分量

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} p_x &= \int \sigma x dS \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos \theta a \sin \theta \cos \phi a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \sigma_0 a^3 \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

同理

$$p_y = 0$$

$$\begin{aligned} p_z &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos \theta a \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \sigma_0 a^3 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0 \end{aligned}$$

则有

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma_0 \mathbf{e}_z$$

该电荷体系的电偶极矩只有 z 分量。

2. 电荷体系的电四极矩

由于此体系电荷分布具有轴对称性 (与 ϕ 无关), 可以证明轴对称电荷分布的四极矩只有一个独立分量, 即 $\mathcal{Q}_{ij} = 0 (i \neq j)$ 。

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right) \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{33}$$

此结论是设对称轴为 z 轴。

证明: 选 z 轴为对称轴。

对每一个位于 (x, y, z) 处的电荷, 总可在 $(-x, y, z)$ 处找到一等量电荷, 这对电荷对于 \mathcal{Q}_{12} 的贡献显然为零。

$$\mathcal{Q}_{12} = 3xyq + 3(-x)yq = 0$$

所有电荷都按此方式配对, 结果整个体系 $\mathcal{Q}_{xy} = 0$ 。

同理, 其他所有非对角分量均为零。

则有:

$$\mathcal{Q}_{ij} = 0 (i \neq j)$$

只剩下对角分量。又由于

$$\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{33} = 0$$

其实只有两个分量是独立的。又由于轴对称性, 在所选坐标系中, x 、 y 的地位完全等价, 因此必有 $\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22}$, 所以 $2\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{33} = 0$ 。

由此即得轴对称分布电荷体系的电四极矩只有一个独立分量。如设 $\mathcal{Q}_{33} = \mathcal{Q}$ 体系的电四极矩张量为

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right)$$

由于

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') dV'$$

则有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{33} &= \int \sigma (3z^2 - a^2) dS \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos \theta (3a^2 \cos^2 \theta - a^2) a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \sigma_0 \left[\int_0^{\pi} 3a^2 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi} a^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \right] = 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22} = -\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{33} = 0$$

如果不用以上结论, 可分别计算出各分量。

例如

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{11} &= \int \sigma(3x^2 - a^2) dS \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos \theta (3a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - a^2) a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \sigma_0 3a^4 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi - \int_0^{\pi} \sigma_0 a^4 \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 0 \\
\mathcal{Q}_{12} &= \int 3xy \sigma dS \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 3a \sin \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi \sigma_0 \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\
&= 3\sigma_0 a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi \\
&= 0 \\
&\dots
\end{aligned}$$

以上讨论了电势多级展开式前三项的物理意义。由于高阶矩的贡献比低阶矩小得多，一般只取到四极矩。

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r}$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r^3}$$

小区域电荷体系在远处的势可视为一系列位于原点的各级电多极矩的叠加，随着 r 的增大，每一级电多极矩势都比前一级更快地减小。

本节讨论的是集中在小区域内电荷系统在远处的电场可采用多级近似的方法，把它视为点电荷、电偶极矩、电四极矩等电场的叠加。

在一级近似下，可将电荷体系视为点电荷。需要更高的精度或电荷体系总电荷为零时，就要考虑它的电偶极矩。例如，研究原子结构时，就把原子核的电荷视为一个点电荷，但需要更高的精度或电荷体系总电荷为零时，就要考虑它的电偶极矩。同样，若体系的电偶极矩为零或需要更高的精度时，就要考虑电四极矩。例如，所有原子核的电偶极矩都为零，因而在高一级近似或研究一些精细结构时，就要考虑电四极矩，把它视为一个点电荷或一个电四极子的叠加。

概括地说，多级展开式的最大贡献项是相当于所有电荷集中在原点的点电荷的势，其次是由于电荷分布不均匀和带电体的形状造成的贡献。电偶极矩反映了电荷分布对原点的不对称性，而电四极矩反映了电荷分布对球的不对称性。测量远处的场可对电荷分布形状做一定的推论。

利用电势多级展开的方法求远处的场的步骤

(1) 分析系统的电荷分布，判断体系的电偶极矩 \mathbf{p} 与电四极矩 \mathcal{Q} 是否为零，对原点对称的电荷体系 $\mathbf{p} = 0$ ，球对称的电荷体系 $\mathcal{Q} = 0$ ；

(2) 根据 Q 、 \mathbf{p} 、 \mathcal{Q}_{ij} 的定义，求出电荷体系的各极矩 Q 、 \mathbf{p} 、 \mathcal{Q}_{ij} ；

(3) 分别求出各极矩激发的电势 $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$

(4) 求出电荷体系的总电势 $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$

【例 1-17】 均匀带电的长形旋转椭球体, 半长轴为 a , 半短轴为 b , 带电荷 Q , 求它的电四极矩和远处的电势。

解: 取 z 轴为旋转轴。

本题中椭球体的方程为

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} &= 1 \\ x &= br \sin \theta \sin \phi \\ y &= br \sin \theta \cos \phi \\ z &= ar \cos \theta \\ dV &= ab^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ V &= \frac{4}{3} \pi ab^2\end{aligned}$$

带电椭球的电荷密度为

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi ab^2}$$

带电体系的电四极矩为

$$\mathcal{Q}_{ij} = \rho_0 \int_V 3(r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) dV$$

下面计算 \mathcal{Q}_{ij} 的各分量

由对称性

$$\begin{aligned}\int_V xy dV &= \int_V yz dV = \int_V zx dV = 0 \\ \mathcal{Q}_{12} &= \mathcal{Q}_{23} = \mathcal{Q}_{31} = 0 \\ \mathcal{Q}_{11} &= \rho_0 \int_V (3x^2 - r^2) dV \\ &= \rho_0 \int_V [3x^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] dV \\ &= \rho_0 \int_V (2x^2 - y^2 - z^2) dV \\ \mathcal{Q}_{22} &= \rho_0 \int_V (3y^2 - r^2) dV \\ &= \rho_0 \int_V (2y^2 - x^2 - z^2) dV \\ \mathcal{Q}_{33} &= \rho_0 \int_V (3z^2 - r^2) dV \\ &= \rho_0 \int_V (2z^2 - x^2 - y^2) dV \\ \int_V x^2 dV &= \int_V b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi dV \\ &= ab^4 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \\ &= \frac{4\pi ab^4}{15}\end{aligned}$$

也可用其他方法算出 $\int_V x^2 dV$ 。

$$\text{令 } x^2 + y^2 = S^2, \text{ 由对称性 } \int_V x^2 dV = \int_V y^2 dV = \frac{1}{2} \int_V S^2 dV$$

而

$$S^2 = (x^2 + y^2) = b^2 r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = b^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V S^2 dV &= \frac{1}{2} \int_V (x^2 + y^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V b^2 r^2 \sin^2 \theta dV \\ &= \frac{1}{2} ab^4 \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{4\pi ab^4}{15} \\ \int_V x^2 dV &= \frac{4\pi ab^4}{15} \end{aligned}$$

与前面算出的结果相同。

同理

$$\int_V y^2 dV = \frac{4\pi ab^4}{15}$$

$$\int_V z^2 dV = \frac{4\pi a^3 b^2}{15}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{11} &= \rho_0 \int_V (2x^2 - y^2 - z^2) dV \\ &= \rho_0 \left(2 \frac{4\pi ab^4}{15} - \frac{4\pi ab^4}{15} - \frac{4\pi a^3 b^2}{15} \right) = \rho_0 \frac{4\pi ab^2}{15} (b^2 - a^2) \\ &= \frac{3Q}{4\pi ab^2} \cdot \frac{4\pi ab^2}{15} (b^2 - a^2) \\ &= \frac{Q}{5} (b^2 - a^2) \\ \mathcal{Q}_{22} &= \rho_0 \int_V (2y^2 - x^2 - z^2) dV \\ &= \frac{3Q}{4\pi ab^2} \left(\frac{4\pi ab^4}{15} - \frac{4\pi a^3 b^2}{15} \right) = \frac{Q}{5} (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

实际上 $\int_V x^2 dV = \int_V y^2 dV$ ，则有 $\mathcal{Q}_{11} = \mathcal{Q}_{22}$ 。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{33} &= \rho_0 \int_V (2z^2 - x^2 - y^2) dV \\ &= \frac{3Q}{4\pi ab^2} \left(2 \frac{4\pi a^3 b^2}{15} - 2 \frac{4\pi ab^4}{15} \right) \\ &= \frac{3Q}{4\pi ab^2} \left[\frac{8\pi ab^2}{15} (a^2 - b^2) \right] \\ &= -\frac{2}{5} Q (b^2 - a^2) \end{aligned}$$

利用

$$\mathcal{Q}_{33} + \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{11} = 0, \quad \mathcal{Q}_{22} + \mathcal{Q}_{11} = -\mathcal{Q}_{33}$$

由已知的 \mathcal{Q}_{11} 、 \mathcal{Q}_{22} 可求出

$$\mathcal{Q}_{33} = -(\mathcal{Q}_{11} + \mathcal{Q}_{22}) = -\frac{2}{5}Q(b^2 - a^2)$$

电四极矩产生的势

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{Q}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \frac{1}{r}$$

当 $i \neq j$ 时, $\mathcal{Q}_{ij} = 0$

则有

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[\mathcal{Q}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \mathcal{Q}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \mathcal{Q}_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \right] \\ &= - \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right] \\ &= \frac{3x^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5} \end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{5} (b^2 - a^2) \left(\frac{3(x^2 + y^2) - 2r^2}{r^5} \right) - \frac{2}{5} Q (b^2 - a^2) \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right] \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(b^2 - a^2)}{5} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} - \frac{2Q}{5} (b^2 - a^2) \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right] \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(b^2 - a^2)}{5r^5} (r^2 - 3z^2 - 6z^2 + 2r^2) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(b^2 - a^2)}{5r^5} 3(r^2 - 3z^2) \right] \\ \varphi^{(2)} &= \frac{Q}{40\pi\epsilon_0} (a^2 - b^2) \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{aligned}$$

利用 $\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$ 计算椭球的电偶极矩

$$\begin{aligned} p_x &= \rho \int_V x dV = \rho \int_V br \sin \theta \sin \phi dV \\ &= \rho \int_0^1 ab^3 r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0 \end{aligned}$$

同理
$$p_y = \rho \int_V y dV = \rho \int_V br \sin \theta \cos \phi dV = \rho b^3 a \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = 0$$

$$p_z = \rho \int_V z dV = \rho \int_0^1 a^2 b^2 r^3 dr \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 0$$

$$p_x = p_y = p_z = 0$$

椭球的电偶极矩

$$\mathbf{p} = 0$$

所以椭球在远处产生的电势为（准确到电四极矩项）

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(2)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{Q(a^2 - b^2)}{40\pi\epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{a^2 - b^2}{10} \frac{3\cos^2 \theta - 1}{r^3} \right) \quad (z = r \cos \theta)$$

对球体， $a = b = c$ ，则 $\mathcal{A}_{ij} = 0$ 。

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

可见球对称的电荷分布没有各级电多极矩，电荷分布偏离球对称性就会出现电四极矩。

1.9.3 电荷体系在外电场中的能量

外电场中某点电势为 φ ，点电荷 q 在 φ 处的电势能

$$W = q\varphi$$

若电荷分布为体分布，也即电荷分布为 $\rho(\mathbf{r})$ 的体系在外电场中的能量

$$W = \int \rho \varphi_e dV \quad (1.9.16)$$

其中 φ_e 为外电场的电势。当电荷分布于小区域内时，可将 φ_e 在坐标原点（ $\mathbf{r} = 0$ ）展开

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi_e(0) + \frac{1}{2!} \sum_{ij} r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \varphi_e(0) + \dots \quad (1.9.17)$$

$$\begin{aligned} W &= \int \rho(\mathbf{r}) \left[\varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 r_i \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi_e(0) + \frac{1}{2!} \sum_{ij} r_i r_j \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \varphi_e(0) + \dots \right] dV \\ &= Q\varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial}{\partial r_i} \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{A}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \varphi_e(0) + \dots \\ &= Q\varphi_e(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) + \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{A}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \varphi_e(0) + \dots \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

式（1.9.18）为小区域内电荷体系在外电场中的能量展开式。 Q 、 \mathbf{p} 、 \mathcal{A}_{ij} 的定义同前。

第一项

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0) \quad (1.9.19)$$

表示体系的电荷集中于原点时在外场中的能量。

$$\text{第二项} \quad W^{(1)} = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_e(0) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_e(0) \quad (1.9.20)$$

表示电荷体系的电偶极矩在外场中的能量, $\mathbf{E}_e(0)$ 是外场在原点的电场强度。可见 \mathbf{p} 与 $\mathbf{E}_e(0)$ 同向能量为负, \mathbf{p} 与 $\mathbf{E}_e(0)$ 反向能量为正。

电偶极矩在外电场中所受的力

$$\mathbf{F} = -\nabla W^{(1)} \quad (1.9.21)$$

$$\text{第三项} \quad W^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_{ij} \mathcal{Q}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \varphi_e(0) \quad \text{或} \quad W^{(2)} = \frac{1}{6} \mathcal{Q} : \nabla \mathbf{E}_e \quad (1.9.22)$$

可见, 只有在非均匀场中, 电四极矩的能量才不为零。

【例 1-18】 如图 1-48 所示, 有一个电矩为 \mathbf{p} 的电偶极子, 位于距无限大平面导体板为 a 处, 求导体对电偶极子的吸引力。

解: \mathbf{p} 的外场是导体板离电偶极子 \mathbf{p} 近的那一侧表面 S_1 上的感应电荷产生的场。由题设知, 导体板的总电量为零, 所以 S_1 上感应出来的总电量和板接地时的相等, 即 S_1 面的边界条件用总电量给出时, 不论板接地还是总电量为零, 都是相同的, 那么右半空间的电势也是相等的。由接地时的结果知, S_1 上感应面电荷的贡献相当于一个电偶极子 \mathbf{p}' 位于 S_1 面的左侧 a 处。

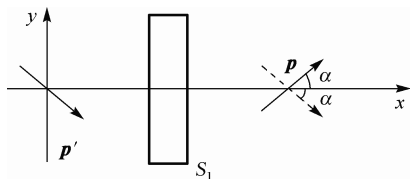


图 1-48 例 1-18 图

当 $\mathbf{p} = p(\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y)$ 时, $\mathbf{p}' = p(\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_y)$, 即 $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 与 x 轴的夹角为 α 和 $-\alpha$ 。选择 \mathbf{p}' 的中心为坐标原点, \mathbf{p}' 在 \mathbf{p} 处激发的场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right] \quad (1.9.23)$$

\mathbf{p}' 与 \mathbf{p} 的相互作用能为

$$\begin{aligned} W &= -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right] \cdot \mathbf{p} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p^2 \cos 2\alpha}{r^3} - \frac{3p^2 \cos^2 \alpha}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p^2 (2 \cos^2 \alpha - 1)}{r^3} - \frac{3p^2 \cos^2 \alpha}{r^3} \right] \\ W &= -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + \cos^2 \alpha) \end{aligned} \quad (1.9.24)$$

相互作用力

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= -\nabla W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^2 (1 + \cos^2 \alpha) \nabla \frac{1}{r^3} \quad \left(\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} \right) \\
 &= \frac{-3p^2(1 + \cos^2 \alpha)}{4\pi\epsilon_0 r^5} \mathbf{r} \quad (r = 2a) \\
 F &= -\frac{3p^2(1 + \cos^2 \alpha)}{64\pi\epsilon_0 a^4} \quad (1.9.25)
 \end{aligned}$$

1.9.4 电流变液的介电极化模型

电流变液是近年来引起广泛关注的新型智能材料。它是由高电容率的固体小颗粒与低电容率的母液组成的均匀悬浮状液体。电流变液是一种在电场里发生形态变化的物质，流体的粘度会随外加电场强度的增大而明显增大，如图 1-49 所示，当电场强度达到某一临界值时，它会发生相变而迅速固化，固化过程在瞬间即可完成，所需时间通常在毫秒量级。这个过程具有可逆性，随着电场的消失，又会迅速地从固体还原成悬浮状液体，这种现象称为电流变效应^①。

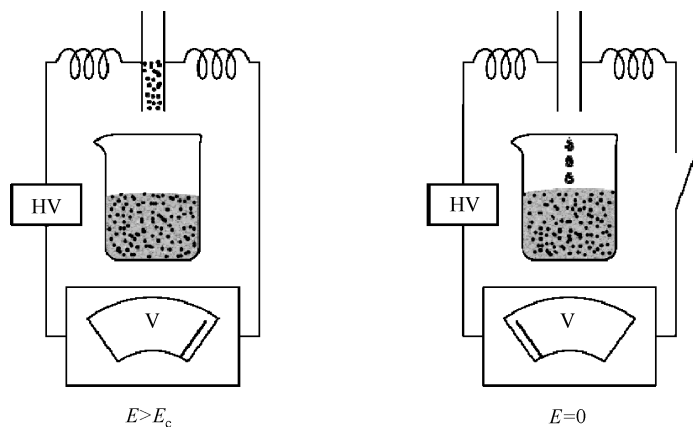


图 1-49 电流变效应

由于电流变效应的复杂性和多学科性，目前尚无精确模型，介电极化模型是目前普遍接受的微观结构模型。在这种模型中，电流变液的本质是电场导致的固体颗粒的固化。当外电场不存在时，由于电介质微粒的密度与溶液的密度十分接近，作用在粒子上的浮力与重力相当，相当于处于微重力环境，热运动粒子在空间随机分布形成均匀的悬浮液。在外电场作用下，电流变液体系中的固体颗粒获得感应电偶极矩，在电场下电偶极矩之间会产生相互作用。例如，在两块金属板之间形成的电场中，微粒内部的正、负电荷彼此向相反的方向产生某种位移，就形成了电偶极子，这种效应的大小取决于该物质的极化率。当流体含有大量的极化颗粒时，颗粒间的电相互作用就变得错综复杂。最简单的情况是两个微粒在强电场中，各自的偶极矩方向大体一致。这时两个微粒的相互作用力取决于相互接近的方式。一般连接两微粒的线与垂直线的夹角不超过 55° 时，两微粒相吸，否则相斥。不

^① T. C. Halsey, "Electrorheological fluids", *Science*, 1992. 258:761-766.

论微粒的运动方向如何, 感应电偶极矩始终与电场平行, 使全部微粒形成相反极性紧聚在一起的构形。此时吸引力占优势, 使微粒吸合在一起, 它们首尾相连排列成行, 构成长“链”, 如图 1-50 所示。电流变液体内的微粒链与电场方向一致并连接两极板。这种类链状结构是形成流体固态的关键。在电场中粒子链化后粒子间的相互作用是产生电流变效应的重要原因。采用电偶极子近似, 可求出电流变液中固体颗粒之间的相互作用力。

设电流变液中的固体颗粒为球形粒子, 半径为 a , 电容率为 ε_p , 母液的电容率为 ε_f , 且 $\varepsilon_p > \varepsilon_f$ 。置于外电场 E_0 中。

利用分离变量法可求出球内、球外电势分别为

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_f}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_f} E_0 \cdot r \quad (r < a)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r + \frac{p \cdot r}{4\pi\varepsilon_f r^3} \quad (r > a)$$

式中

$$p = 4\pi\varepsilon_f \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_f}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_f} a^3 E_0$$

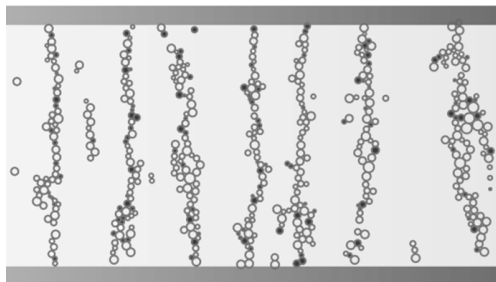


图 1-50 电流变液的链状结构

p 为球面上极化电荷的等效电偶极矩。

当流体内含有大量的极化颗粒时, 其相互作用错综复杂, 这里只考虑最简单的情况, 即电场中只存在两个微粒。在外电场中, 两个微粒之间的相互作用实际上是两个等效的电偶极矩之间的相互作用。

考虑两个电偶极矩 p_1 与 p_2 相距为 r , 空间方向任意。可求出两个电偶极矩之间的静电相互作用力。

设 p_1 位于原点, p_2 位于 r 点, p_1 在 r 处产生的电势和电场为

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_f} \frac{p \cdot r}{r^3}$$

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_f} \frac{3(p_1 \cdot r)r - r^2 p_1}{r^5}$$

p_1 与 p_2 的相互作用能

$$W = -p_2 \cdot E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_f} \frac{r^2(p_1 \cdot p_2) - 3(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r)}{r^5} \quad (1.9.26)$$

p_1 的坐标由球坐标 θ_1 、 ϕ_1 描述; p_2 由 θ_2 、 ϕ_2 描述。为方便起见, 选 r 沿 z 轴方向, 则

$$\theta_1 = \angle(r, p_1), \quad \theta_2 = \angle(r, p_2)$$

两个平面 (r, p_1) 和 (r, p_2) 间的夹角 $\phi_2 - \phi_1 = \phi$, 由此可得

$$p_1 \cdot p_2 = p_1 p_2 \cos \alpha = p_1 p_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi)$$

$$p_1 \cdot r = p_1 r \cos \theta_1; \quad p_2 \cdot r = p_2 r \cos \theta_2$$

$$W = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_f} \frac{(\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{r^3} \quad (1.9.27)$$

所以 \mathbf{p}_1 和 \mathbf{p}_2 的相互作用力

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_f} \frac{3\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{r^4} (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2) \mathbf{e}_r \quad (1.9.28)$$

式 (1.9.27) 和式 (1.9.28) 分别是两个电偶极矩空间方向任意时静电相互作用能和相互作用力的表达式。

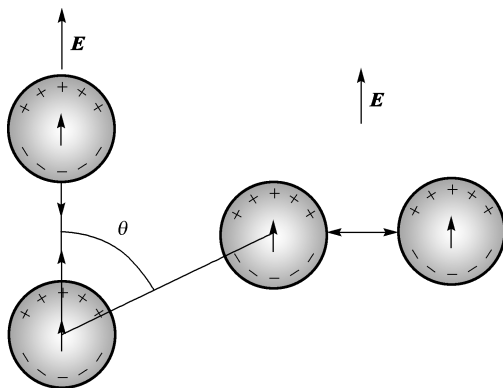


图 1-51 两个电偶极矩的排列

为了简单起见, 取 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$; $\theta_1 = \theta_2 = \theta$; $\phi = 0$, 如图 1-51 所示, 两个电偶极矩之间的相互作用能和相互作用力为

$$W = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_f} \frac{(1 - 3\cos^2\theta)}{r^3} \quad (1.9.29)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_f} \frac{3p^2(1 - 3\cos^2\theta)}{r^4} \mathbf{e}_r \quad (1.9.30)$$

可以证明存在一个临界角 $\theta_c = 55^\circ$, 当 $\theta < 55^\circ$ 时, 为吸引力; 当 $\theta > 55^\circ$ 时, 为排斥力; 当 $\theta = 0$ 时, 吸引力最大, 大小为

$$F_{\max} = \frac{6p^2}{4\pi\epsilon_f r^4} \quad (1.9.31)$$

将电偶极矩 \mathbf{p} 代入

$$F_{\max} = \frac{24\pi a^6 \epsilon_f (\beta E)^2}{r^4} \quad (1.9.32)$$

其中

$$\beta = \frac{\epsilon_p - \epsilon_f}{\epsilon_p + 2\epsilon_f}$$

由此可见, 两个固体颗粒之间的相互作用力与电场强度的平方成正比, 这一结论与实验结果相吻合。

习 题

1.1 证明均匀介质内部的极化电荷体密度 ρ_p , 总等于自由电荷体密度 ρ_f 的 $-(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})$ 倍。

1.2 有一内、外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球, 介质的电容率为 ϵ , 使介质内均匀带静止自由电荷 ρ_f , 求:

- (1) 空间各点的电场;
 (2) 极化体电荷和极化面电荷分布。

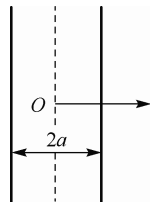
1.3 证明: 当两种绝缘介质的分界面上不带面自由电荷时, 电场线的偏折满足:

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

式中, ε_1 和 ε_2 分别为两介质的电容率, θ_1 和 θ_2 分别为界面两侧电场线与法线的夹角。

1.4 试用边值关系证明: 在绝缘介质与导体的分界面上, 在静电情况下, 导体外的电场线总是垂直于导体表面的。

1.5 如习题 1.5 图所示, 有一厚度为 $2a$, 电荷密度为 ρ_0 的均匀带电无限大平板, 试用分离变量法求空间电势的分布。



习题 1.5 图

1.6 内半径为 a , 外半径为 b 的两个同心导体球壳, 令内球接地, 外球带电量 Q , 试用分离变量法求空间电势分布。

1.7 均匀外电场 E_0 中, 置入半径为 R_0 的导体球。求以下两种情况的电势分布:

(1) 导体球上接有电池, 使球保持电势为 φ_0 ;

(2) 导体球上带有总电荷 Q 。

1.8 在电容率为 ε 的无限均匀介质中, 挖一个半径为 a 的空球, 球心处置一电偶极矩为 p_f 的自由电偶极子, 试求空间电势分布。

1.9 半径为 R 的均匀介质球中心置一自由电偶极子 p_f , 球外充满另一种介质, 求空间各点的电势和极化电荷分布 (介质球电容率为 ε_1 , 球外介质电容率为 ε_2)。

1.10 两个接地的无限大导电平面, 其夹角为 60° , 点电荷 Q 位于这个两面角的平面上, 并与棱边 (两面角之交线) 相距为 a 。试用电像法求真空中的电势。

1.11 接地空心导体球, 内外半径为 R_1 和 R_2 , 球内离球心 a 处 ($a < R_1$) 置一点电荷 Q , 试用电像法求空间电势分布。导体上感应电荷分布在内表面还是外表面? 其量为多少? 若导体球壳不接地而是带电量 Q_0 , 则电势如何分布? 若导体球壳具有确定的电势 φ_0 , 电势如何分布?

1.12 4 个点电荷, 两个 $+q$, 两个 $-q$, 分别处于边长为 a 的正方形的 4 个顶点, 相邻的符号相反, 求此电荷体系远处的电势。

1.13 求面电荷密度按 $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ 分布, 半径为 a 的球的电偶极矩。该系统是否存在电四极矩?

1.14 设真空中电场的电势为

$$\varphi = \begin{cases} q/r & (r > a) \\ -qr^2/(2a^3) + 3q/(2a) & (r < a) \end{cases}$$

式中, r 为离坐标原点的距离, a 和 q 为常数, 求相应的电荷分布。

1.15 在一点电荷 q 的电场中, 距离它为 d 的地方有一偶极子, 其电偶极矩 $p = ql$, 求在下列两种情况下, 此电偶极矩所受的力 F 和力矩 L :

(1) 偶极子的电偶极矩 p 沿点电荷电场的方向;

(2) 偶极子的电偶极矩 p 垂直于点电荷的电场。

第 2 章 静 磁 场

静磁场是恒定电流所激发的不随时间变化的磁场。

本章主要内容：静磁场的基本规律和求解静磁场分布的方法。

讲授思路：从毕奥-萨伐尔定律出发，建立静磁场方程，引入磁场矢势，介绍求解静磁场的两种方法。静磁场的研究方法与静电场类似，可以采用类比的学习方法。

2.1 恒 定 电 流

磁场是和电流互相作用的，在讨论恒定电流产生的磁场之前，先说明恒定电流分布的规律性。

2.1.1 电 荷 守 恒 定 律

电荷守恒定律是电磁理论中基本的实验定律。

实验表明，电荷是守恒的，从某一闭合曲面流出的电流等于单位时间内此闭合曲面所包围的体积中所减少的电量，如图 2-1 所示。

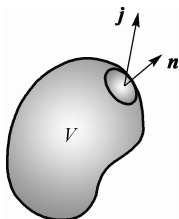


图 2-1 电荷守恒

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.1.1)$$

这是电荷守恒定律的积分形式。

应用高斯散度定理，

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV$$

则可得

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

由于体积是任意的，则有

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1.2)$$

这是电荷守恒定律的微分形式，也称为电流连续性方程。式 (2.1.2) 对任意变化电流都

是成立的。在恒定电流情况下，电荷分布不随时间变化，即 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，则有

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.1.3)$$

或

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1.4)$$

式 (2.1.3) 和式 (2.1.4) 称为恒定电流的条件。式 (2.1.3) 是恒定电流条件的微分形式，式 (2.1.4) 是恒定电流条件的积分形式。式 (2.1.3) 表示恒定电流分布是无源的，即恒定电流的电流线一定是闭合的。因此，载有恒定电流的电路应是闭合的，且沿一段没有分支的电路，各处的电流强度必定相等，这是我们熟知的事实。

2.1.2 欧姆定律的微分形式

实验表明，导体中的电流还和导体中的电场分布有关，在导体中，某点的电流密度 \mathbf{j} 与该点的电场强度 \mathbf{E} 之间的关系为

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1.5)$$

式中， σ 是导体的电导率。式 (2.1.5) 称为欧姆定律的微分形式。虽然式中不包含微分和导数，但它表示的是导体中一点电流密度和电场强度之间的关系。通常将

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.1.6)$$

称为欧姆定律的积分形式。

2.1.3 恒定电流的电场

由于恒定电流的电荷分布不随时间变化，所以由这些电荷激发的电场称为恒定电流的电场，简称为恒定电场。恒定电场不随时间变化这一点与静电场相同，而静电场和恒定电场的区别在于，静电场比恒定电场所要求的条件更苛刻。

静电场情况下，静电平衡条件要求电荷不流动，即没有电流，因此静电场中导体内部处处满足 $\mathbf{E} = 0$ 。恒定电场情况下，只要求电荷分布不随时间变化，并不要求电荷静止，或者说电荷可以移动。但是每一点的电荷体密度却是不随时间变化的，对每一点来说，只要流出的电量等于流入的电量，就可以保证每一点的电量不变，就达到了电荷分布不随时间变化的要求。因此，静电场是恒定电场的特例。

恒定电场中场与电荷分布均不随时间变化，因此恒定电场和静电场的场方程是一样的。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

根据恒定电场的场方程可以证明，恒定电流情况下，均匀导体内部宏观电荷体密度 ρ 等于零。将式 (2.1.5) 代入恒定电流条件式 (2.1.3)，可以写出

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$$

要使上式成立，载流导体的电导率 $\sigma \neq 0$ ，只有 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，根据 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ ，则可得到 $\rho = 0$ 。

因此，载有恒定电流的均匀导体满足方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 。

需要指出的是, 导体中的电场是由已知的外来电动势引起的, 也就是说, 恒定电流的存在是以外来电动势的存在为前提的, 没有外来电动势, 电流不可能保持恒定。

表 2-1 静电场方程与导体中恒定电场方程的相似性

介质中的静电场	导体中的恒定电场
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ (在 $\rho = 0$ 处)	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$
$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
两种介质分界面上 ($\sigma_f = 0$ 处)	两种导电介质分界面上
$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases}$
两类边界条件 $\varphi_i = \text{常数}$ (导体上)	两类边界条件 $\varphi_i = \text{常数}$ (理想导体)
$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$	$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$

由对比可以看出, 静电场中 $\rho = 0$ 区域, \mathbf{D} 与恒定电场中 \mathbf{j} 地位相当; 静电场中 ϵ 与恒定电场中 σ 地位相当; 静电场中 Q 与稳定电场中 I 地位相当。利用这种相似性, 求恒定电场时就可利用静电场的结果, 如表 2-1 所示。

【例 2-1】 如图 2-2 所示, 同轴电缆由两个共轴圆柱导体组成, 缆心半径为 r_1 , 缆皮半径为 r_2 , 其间充以一层均匀介质, 介质的电导率为 σ 。当内外导体间加以恒定电压时, 由于绝缘不完善而引起两导体间有微小的漏电流。求同轴电缆单位长度上的漏电导 (略去沿轴向很小的电场分量)。

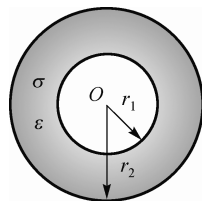


图 2-2 例 2-1 图

解: 欲求漏电导, 必须先求出漏电流及内、外导体间的电势差, 而求电流和电势差须先求出电场分布。

(1) 用高斯定理求电场分布

在介质中作一同心柱面, 半径为 r , 长度为 l 。

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad Q = \lambda l \quad (\lambda \text{——内导体单位长度上电荷})$$

略去沿轴向的电场分量, 可认为电场和漏电流都是轴向的, 只计穿过侧面积 $2\pi r l$ 的通量。

$$D 2\pi r l = \lambda l$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r^2} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi r^2 \epsilon} \mathbf{r}$$

(2) 穿过柱面单位长度的漏电流

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \sigma E 2\pi r \cdot 1 = \sigma \frac{\lambda}{\epsilon}$$

(3) 两导体间的电势差

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(4) 漏电导

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$

$$G = \frac{I}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

【例 2-2】 理想导体为电极的平行板电容器, 充满了两层平行于板的漏电介质。它们的厚度分别为 d_1 和 d_2 , 导电率分别为 σ_1 和 σ_2 , 电容率分别 ε_1 和 ε_2 , 电源的电动势为 U , 忽略边缘效应, 试求:

(1) 两种介质中的电场强度;

(2) 通过电容器的电流密度;

(3) 两种介质分界面上的全部面电荷和自由电荷面密度。

解: 当电流恒定时, 两种介质中的电流强度相等, 电流密度也相等, 则有

$$j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \quad E_1 = \frac{j}{\sigma_1} \quad E_2 = \frac{j}{\sigma_2}$$

由 $U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = j \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right)$, 得

$$j = \frac{U}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}} = \frac{U \sigma_1 \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

则

$$E_1 = \frac{U \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

$$E_2 = \frac{U \sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

利用介质分界面上 E_n 、 D_n 满足的边值关系求面电荷密度。

取法线方向由 ε_1 指向 ε_2

$$\sigma_f + \sigma_p = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \frac{\varepsilon_0 U}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\sigma_f = D_{2n} - D_{1n} = \frac{U}{\sigma_2 d_1 + d_2 \sigma_1} (\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)$$

可见, 两种介质交界面上自由电荷分布与两种介质的电容率和电导率有关, 总电荷分布仅与两种介质的电导率有关。

2.2 真空中的静磁场方程

2.2.1 静磁场的实验定律

实验指出, 两个电流之间有作用力, 和静电作用力一样, 这种作用力也需要一种物质作为媒介来传递, 这种物质称为磁场。电流激发磁场, 另一个电流处于该磁场中, 就受到磁场对它的作用力, 对电流有作用力是磁场的特征性质。

一个电流元 $I d\mathbf{l}$ 在磁场 \mathbf{B} 中所受的力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (2.2.1)$$

式 (2.2.1) 称为安培力公式, 恒定电流激发的磁场规律由毕奥-萨伐尔定律给出。如图 2-3 所示, 电流元 $I d\mathbf{l}$ 在真空中空间任意一点 P 产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.2.2)$$

对于电流分布于导体中的情形, 我们在导体中取出沿电流线长为 $d\mathbf{l}$, 横截面为 dS 的一小段, 如图 2-4 所示。

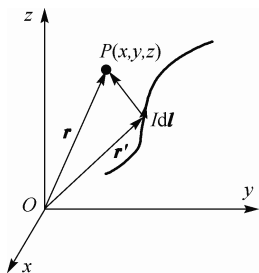


图 2-3 电流元的磁场

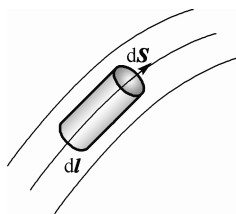


图 2-4 电流分布于导体中

因为 dS 很小, $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dS d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$, 则有

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV \quad (2.2.3)$$

全部载流导体激发的磁场

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2.2.4)$$

积分遍及电流分布区域。其中 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 为源点 \mathbf{r}' 上的电流密度。

毕奥-萨伐尔定律是磁场分布规律的积分形式。为了反映磁作用在场中传递的特点, 还需要找出磁场分布规律的微分形式, 即找出空间一点上的磁场和邻近点上的磁场的关系或空间的一个电流和邻近的磁场的关系。

2.2.2 真空中静磁场的基本方程

描述静磁场基本性质的两个基本定理是磁场的高斯定理和安培环路定理。

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (2.2.6)$$

类似于静电场, 从这两个方程出发, 利用高斯散度定理和斯托克斯定理, 可以得到静磁场方程的微分形式。

由式 (2.2.5)

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

则有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2.7)$$

由式 (2.2.6)

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

则有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.2.8)$$

式 (2.2.7) 和式 (2.2.8) 是真空中静磁场的基本方程。由此可知, 静磁场是一个有旋无源场, 是一种涡旋场。电流激发的磁场是无源的, 也就是说, 没有与电荷相对应的磁荷作为磁场的源, 近年来对于磁单极 (孤立的磁荷) 存在的可能有不少讨论, 实验上也一直在寻找带有磁荷的粒子, 但是到目前为止, 还没有找到任何关于磁单极存在的确实证据。如果磁荷存在的话, $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$, 电动力学理论将要修改。

2.2.3 磁场旋度和散度公式的证明

现在用毕奥-萨伐尔定律对静磁场的旋度和散度公式进行证明。

1. 计算 $\nabla \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

令 \mathbf{R} 为由源点 \mathbf{r}' 到场点 \mathbf{r} 的矢径, 即 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。

根据公式 $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$, 可以得到

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} = -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{R} = \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

又因为

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = \nabla \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

且 $\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ 是由于 ∇ 只对 \mathbf{r} 作用, ∇ 对 \mathbf{r}' 的作用就像是作用在常量上一样。于是可得

$$\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} = \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}$$

则有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

因为积分是对 \mathbf{r}' 作用的, 而 ∇ 与积分变量 \mathbf{r}' 无关, 可把 ∇ 提到积分号之外。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

令

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.2.9)$$

则有

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0\end{aligned}$$

则

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

式 (2.2.7) 得证。

2. 计算 $\nabla \times \mathbf{B}$

由于

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.2.10)$$

(1) 先求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' \\ \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right] &= \frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{R}\end{aligned}$$

注意 ∇ 不作用在 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 上。

引入算符

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z'} \mathbf{e}_z$$

由于

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad \nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R}$$

则

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} dV'$$

而 $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} = \nabla' \cdot \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right] - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$, 对于恒定电流 $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, 所以有

$$-\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} = -\nabla' \cdot \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right] dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right] \cdot d\mathbf{S}'$$

由于积分区域包括所有电流在内, 没有电流通过区域的界面 S , 因此积分为零, 则有

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.2.11)$$

(2) 再计算 $\nabla^2 \mathbf{A}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV'$$

因为当 $R \neq 0$ 时, $\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0$, 因此上式的被积函数只可能在 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ 点不为零。因而体积分仅需对包围 \mathbf{r}' 点的小球积分, 这时可取 $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, 并将其提出积分号外。

$$\nabla^2 A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV'$$

而 $\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = -\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = -\oint_S \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{S}'$, 注意 \mathbf{R} 是由源点 \mathbf{r}' 指向场点 \mathbf{r} 的矢量, 它和面元 $d\mathbf{S}'$ 同向, 因此

$$\oint_S \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{S}' = \oint_S \frac{1}{R^2} dS' = \oint_S d\Omega = 4\pi$$

由此得到

$$\nabla^2 A = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.2.12)$$

将式 (2.2.11) 和式 (2.2.12) 代入式 (2.2.10) 得到

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

式 (2.2.8) 得证。

由以上推导可见, 静磁场方程的微分形式是毕奥-萨伐尔定律的推论。毕奥-萨伐尔定律只在恒定电流下情况成立。实践证明, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 在一般变化磁场的情况下也是成立的。而 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ 只在恒定电流情况下成立, 一般情况下需要修改。

【例 2-3】 电流 I 均匀分布在半径为 a 的无穷长直导线内, 求空间各点的磁场强度, 并由此计算磁场的旋度。

解: (1) 先求空间的磁场分布

过 P 点在与导线垂直的平面上作一半径为 r 的圆周, 圆心在导线轴上, 如图 2-5 所示。由对称性, 在圆周各点的磁感应强度的大小相等, 方向沿着圆周环绕方向。当 $r > a$ 时, 通过圆内的总电流为 I , 用安培环路定理得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > a)$$

写成矢量式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

\mathbf{e}_ϕ 为柱坐标系下圆周环绕方向的单位矢量。

若 $r < a$, 则通过圆内的总电流为

$$\pi r^2 j = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2} I$$

应用安培环路定理得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \frac{\mu_0 I}{a^2} r^2$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi \quad (r < a)$$

(2) 计算 $\nabla \times \mathbf{B}$

当 $r > a$ 时, 将 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$ (B_r 、 B_z 分量为零) 代入柱坐标系求旋度的式 (0.4.4) 可得

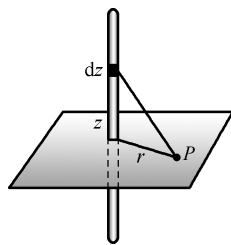


图 2-5 例 2-3 图

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \mathbf{e}_z = 0$$

当 $r < a$ 时, 将 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\phi$ 代入式 (0.4.4)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \mathbf{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r^2 \right) \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z = \mu_0 \mathbf{j}$$

计算结果为

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (r > a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (r < a)$$

由此可见, 某点上磁感应强度的旋度只和该点上电流密度有关, 这是旋度概念的局域性质。对任何包围着导线的回路都有磁场环量, 但是磁场的旋度只存在于有电流分布的导线内部, 而在周围空间中的磁场是无旋的。

2.3 磁介质中的静磁场方程

2.3.1 介质的磁化

将磁介质放入磁场中, 磁场会使介质磁化, 同时处于磁化状态的磁介质又会产生一个附加磁场, 使磁介质中的磁场不同于真空中的磁场。磁介质是由分子 (或原子) 组成的, 分子的电子不断绕原子核做轨道运动, 同时电子还做自旋运动, 这些运动都形成电流。一个分子内的所有电流称为分子电流, 它相当于一个小的载流线圈, 因此有相应的磁矩。

分子电流的磁矩定义为

$$\mathbf{m} = i\mathbf{a} \quad (2.3.1)$$

式中, i 为分子电流的电流强度, \mathbf{a} 为分子电流所围的面积矢量, \mathbf{a} 与 i 方向满足右手螺旋, 如图 2-6 所示。

当磁介质中没有外磁场时, 分子由于热运动, 排列很混乱, 因此总磁矩为零, 当加入外磁场后, 它们的排列沿外磁场方向取向, 总磁矩便不为零。

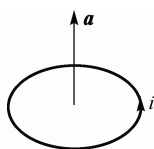


图 2-6 分子电流的磁矩

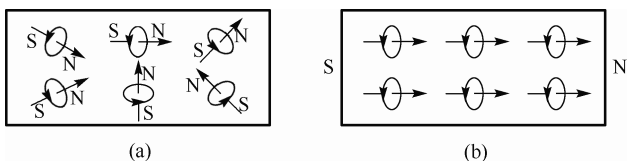


图 2-7 磁介质中的分子

如图 2-7 所示, 无外磁场时, 由于热运动, 分子电流取向混乱, 分子磁矩的矢量和为零; 加入外磁场后, 磁场对分子电流有取向作用, 使分子电流有规则取向, 分子磁矩的矢量和不为零, 即磁介质磁化后, 出现宏观磁矩分布, 形成宏观磁化电流密度 \mathbf{j}_M 。

引入磁化强度矢量 \mathbf{M} 表征磁介质的磁化状态, 定义单位体积内所具有的分子磁矩矢量和为磁化强度矢量。

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad (2.3.2)$$

下面求磁化电流密度与磁化强度之间的关系。

如图 2-8 所示, S 为介质内部的一个曲面, 其边界为 L , 取与 L 循回方向成右手螺旋的方向为曲面 S 的法线方向。下面来计算沿着曲面 S 的法线方向流过的磁化电流强度 I_M 。由于电流强度代表单位时间通过 S 面的电量, 只有在分子电流与 S 面割截时才发生电量通过。

由图 2-8 可见, 若分子电流被边界线 L 穿过, 这个分子电流对 I_M 有贡献, 其他情况或分子电流根本不穿过 S , 或者穿过两次恰好抵消, 所以对 I_M 无贡献。

如图 2-8 所示, 右边的分子电流流出 S 面 (沿 n 方向), 左边的分子电流流进 S 面。当流出与流进不等时, S 面上便有净电流通过。因此, 通过 S 的总的磁化电流等于边界 L 所穿过的分子数乘以每个分子电流强度 i , 因此要算出被边界线 L 穿过的分子数。

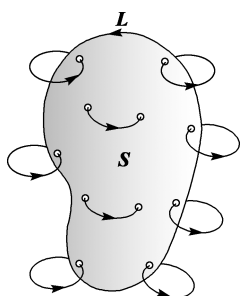


图 2-8 磁化电流密度与磁化强度之间的关系

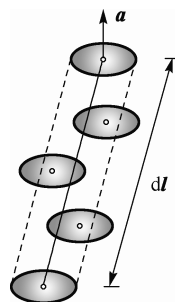


图 2-9 穿过 dl 的分子电流

如图 2-9 所示, dl 是边线 L 的一个线元, 设分子电流圈的面积为 a , 若分子中心位于 $a \cdot dl$ 的柱内, 则该分子电流就被 dl 所穿过, 若单位体积内的分子数为 n , 则被 dl 所穿过的分子电流数为 $na \cdot dl$, 即相当于 $a \cdot dl$ 体积内的分子数为 $na \cdot dl$ 。

若 $a \cdot dl > 0$ (a 与 dl 夹角为锐角) 表示流出; $a \cdot dl < 0$ (a 与 dl 夹角为钝角) 表示流进。因此, 被 dl 穿过的分子对 S 面贡献的磁化电流强度为

$$dI_M = ina \cdot dl = nm \cdot dl = M \cdot dl$$

所以总的磁化电流强度

$$I_M = \oint_L M \cdot dl \quad (2.3.3)$$

用磁化电流密度表示

$$\int_S j_M \cdot dS = \oint_L M \cdot dl$$

S 是以 L 为边界的面积。

根据斯托克斯定理

$$\oint_L M \cdot dl = \int_S (\nabla \times M) \cdot dS$$

则有

$$j_M = \nabla \times M \quad (2.3.4)$$

式 (2.3.4) 是磁化电流密度与磁化强度矢量之间的关系, 介质内磁化电流的密度取决于磁化强度矢量的旋度。

2.3.2 介质中的静磁场方程

由以上讨论可以知道, 当磁场中有介质时, 磁场要使介质磁化产生磁化电流, 这些磁化电流和传导电流一样也要激发磁场, 于是真空中的磁场方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ 应改写为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_M) \quad (2.3.5)$$

式中, \mathbf{j}_f 为传导电流, 将式 (2.3.4) 代入可得

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_f$$

引入磁场强度矢量 \mathbf{H} , 定义

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.3.6)$$

则有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (2.3.7)$$

式 (2.3.7) 是磁介质中静磁场的基本方程之一。它指出在恒定电流的磁场中, 任意一点磁场强度的旋度等于该点的传导电流密度, 而与其他各点的电流分布无关。由式 (2.3.5) 和式 (2.3.7) 可以看出, 引入辅助物理量 \mathbf{H} 消去了场方程中的磁化电流密度, 而磁感应强度 \mathbf{B} 描述所有电流激发的磁场, 代表介质内的宏观磁场。为了解出 \mathbf{B} , 还必须找出 \mathbf{H} 与 \mathbf{B} 的关系。

实验指出, 对于各向同性非铁磁介质, \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 满足线性关系

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (2.3.8)$$

χ_m 是介质的磁化率, 是一个没有量纲的纯数。

将式 (2.3.8) 代入式 (2.3.6) 中

$$\mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H}$$

令 $\mu = \mu_r \mu_0$, $\mu_r = 1 + \chi_m$ 可得到

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.3.9)$$

μ 称为介质的磁导率, μ_r 称为介质的相对磁导率。

应当说明一下, 静电场中的基本物理量是电场强度 \mathbf{E} , 辅助物理量是电位移矢量 \mathbf{D} , 静磁场中的基本物理量是磁感应强度 \mathbf{B} , 辅助物理量是磁场强度 \mathbf{H} 。这是因为在历史的早期, 由于误以为磁现象是由磁荷产生的, 没有认识到它本质上是由电流产生的, 所以将 \mathbf{H} 称为磁场强度, 把 \mathbf{B} 称为磁感应强度。但是从电流产生磁场的正确观点来看, 用电流元在磁场中受力来确定 \mathbf{B} , 如同用试验电荷在电场中受力来确定 \mathbf{E} 一样, \mathbf{B} 应该与 \mathbf{E} 对应, 而 \mathbf{H} 应该与 \mathbf{D} 对应, 所以 \mathbf{B} 是表征磁场的基本物理量, 而 \mathbf{H} 是辅助物理量。正确地说, 应该把 \mathbf{B} 称为磁场强度, 而把 \mathbf{H} 称为磁感应强度。但由于历史的原因, 在说清楚其定义后, 仍保留着 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 原来的名称。在实验上, 物理量 \mathbf{H} 有一定的重要性。这是因为 \mathbf{H} 与传导电流 \mathbf{j}_f 有关, 而 \mathbf{j}_f 直接受实验条件控制。如在磁路计算中主要用 \mathbf{H} , 不用 \mathbf{B} 。

静磁场的另一方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 在介质中仍然成立。

这是因为传导电流满足 $\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0$ ，且介质中磁化电流的密度满足 $\nabla \cdot \mathbf{j}_M = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) = 0$ ，这说明 \mathbf{j}_M 与 \mathbf{j}_f 有相同的性质。因而磁化电流激发的磁场也和传导电流激发的磁场一样，具有闭合的磁场线，所以介质中的磁场 \mathbf{B} 仍然是无源场。

因此，在磁介质中静磁场仍然是无源有旋场，基本方程为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \quad (\text{非铁磁介质})\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

可以证明在各向同性线性介质中，磁化电流密度 \mathbf{j}_M 与传导电流密度 \mathbf{j}_f 的关系为

$$\mathbf{j}_M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{j}_f \tag{2.3.11}$$

磁化电流密度 \mathbf{j}_M 与传导电流密度 \mathbf{j}_f 成正比。因此，在 $\mathbf{j}_f = 0$ 的点，也一定有 $\mathbf{j}_M = 0$ 。例如，恒定电流在无限长圆柱形均匀导体中沿轴向流动时，将柱外空间充满均匀介质，圆柱内、外磁场分布不均匀，磁化也不均匀。磁化电流只存在于圆柱内，圆柱外无磁化电流。

2.4 静磁场的边值关系

在不同磁介质的分界面上，由于介质的性质有跃变，磁场分布也将有跃变，因此静磁场方程的微分形式已不再适用，需要利用静磁场方程的积分形式来找出两种介质分界面上的场方程，即磁场的边值关系。静磁场方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2.4.1}$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{S} \tag{2.4.2}$$

2.4.1 法向分量的跃变

在两种磁介质的分界面上取一扁平圆柱体，两底分别位于两种磁介质内，且与分界面平行。如图 2-10 所示，高度 h 为无限小量。由于底面 dS 很小，可认为其上各点的磁感应强度 \mathbf{B} 相同，则通过此闭合面的磁通量为

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= B_{2n} dS - B_{1n} dS = 0 \\ B_{2n} &= B_{1n}\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{2.4.4}$$

式中， \mathbf{n} 为法向方向的单位矢量，由介质 1 指向介质 2，式 (2.4.3) 和式 (2.4.4) 表示分界面上磁感应强度 \mathbf{B} 法向分量连续。

由于 $\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_1$ ， $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$ ，式 (2.4.3) 可以写成

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$H_{1n} \neq H_{2n}$$

而分界面上 \mathbf{H} 的法向分量不连续。

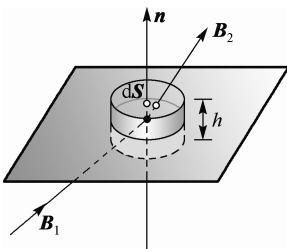


图 2-10 磁介质分界面上扁平圆柱体

2.4.2 切向分量的跃变

在两种介质的分界面上取一狭长闭合回路，如图 2-11 所示，其两长边 $d\mathbf{l}$ 位于分界面的两侧，且与分界面平行，短边 h 趋近于 0。

沿此闭合回路取 \mathbf{H} 的环流

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{2t} d\mathbf{l} - H_{1t} d\mathbf{l} \quad (2.4.5)$$

分两种情况讨论。

(1) 如果分界面上没有传导电流的情况，由式 (2.4.5) 可知， \mathbf{H} 的环流为零。

$$H_{2t} = H_{1t} \quad (2.4.6)$$

而 $H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_1}$, $H_{2t} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$, $\mu_1 \neq \mu_2$, 则

$$B_{2t} \neq B_{1t}$$

式 (2.4.6) 表明，如果分界面上没有传导电流， \mathbf{H} 的切向分量是连续的， \mathbf{B} 的切向分量是不连续的。

(2) 如果界面上有传导电流的情况，此时需要定义面电流密度，以 α 表示。

面电流实际上是靠近表面的相当多分子层内的平均效应，对于宏观来说，薄层的厚度趋于零，如图 2-11 所示，通过电流的横截面 $abdca$ 所围的面积变为横截线 ef 线。面电流密度的大小 α 定义为：垂直通过单位横截线的电流，它的方向即为该点电流的方向，如图 2-12 所示。垂直流过 Δl 线段的电流强度为 $\Delta I = \alpha \Delta l$ 。

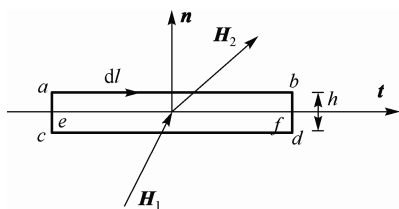


图 2-11 分界面上的闭合回路

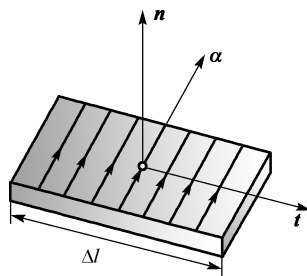


图 2-12 界面上的面电流密度

由于存在面电流, 在界面两侧的磁场分布将发生跃变, 如图 2-13 所示, 此时 \mathbf{H} 的环流不为零。当 $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向为 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ 时, 应有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{2t} - H_{1t})\Delta l = \alpha_f \Delta l$$

式中, α_f 为传导面电流密度, 实际是传导电流线密度。

通过由 $abdca$ 组成的回路 L 的传导电流强度为

$$\Delta I_f = \alpha_f \Delta l$$

则有

$$H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f \quad (2.4.7)$$

当界面上有传导电流时, \mathbf{H} 的切向分量不连续。

下面写出式 (2.4.7) 的矢量形式。

令 $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$, 当 $\boldsymbol{\alpha}_f$ 与 \mathbf{N} 有一夹角时, 如图 2-14 所示, 流过界面上任一线元 $\Delta \mathbf{l}$ 上的传导电流为 $\Delta I_f = \mathbf{n} \times (\Delta \mathbf{l} \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_f$, \mathbf{t} 为 $\Delta \mathbf{l}$ 上单位矢量。

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{l}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_f = (\boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{n}) \cdot \Delta \mathbf{l}$$

由于 $\Delta \mathbf{l}$ 为界面上任意矢量, 则有

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{n}$$

式中, $_{//}$ 表示投射到界面上的矢量 (即 $\Delta \mathbf{l}$ 上的矢量)。

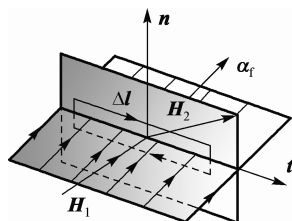


图 2-13 分界面两侧的磁场分布

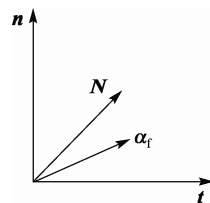


图 2-14 传导电流的方向分布图

上式用 \mathbf{n} 叉乘

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{n})$$

$$\text{因为 } \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_{//} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1), \quad \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{n}) = \boldsymbol{\alpha}_f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_f) = \boldsymbol{\alpha}_f$$

则有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f \quad (2.4.8)$$

这是磁场切向分量的边值关系。由此可知, 在任一载流的分界面两侧, \mathbf{H} 的切向分量不连续, 与紧邻载流面上的传导电流面密度 $\boldsymbol{\alpha}_f$ 有关。

细导线密绕的截流长直螺线管可视为两种介质分界面上存在面电流的实际例子。长直螺线管近中段处, 管内的磁场可视为均匀的, 方向沿着管轴。设管外磁场强度为 \mathbf{H}_1 , 管内磁场

强度为 H_2 。根据式 (2.4.7) 可以写出 $H_{2t} - H_{1t} = nI$, n 是单位长螺线管的匝数, nI 就是面电流密度, 可以得出管外 $H_{1t} = 0$, 管内 $H_{2t} = nI$ 。

式 (2.4.4) 与式 (2.4.8) 是静磁场的边值关系, 它表征两种介质分界面两侧的磁场和界面上电流的相互制约关系。

利用磁化电流密度与磁化强度之间的积分关系, 可以证明磁化强度矢量 \mathbf{M} 的边值关系为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \boldsymbol{\alpha}_m \quad (2.4.9)$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}_m$ 为磁化电流面密度 (证明从略)。

2.5 磁场的矢势及其微分方程

2.5.1 矢势

静电场是有源无旋场, 由于其无旋性, 可以引入标势来描述空间的电场。而静磁场是无源有旋场, 由于其有旋性, 不能引入一个标势来描述整个空间的磁场。但是根据磁场的无源性, 可以引入另一个矢量来描述它。

根据矢量场论, 若 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, \mathbf{B} 可以表示为任意矢量的旋度, 即 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.5.1)$$

\mathbf{A} 称为磁场的矢量势, 简称为矢势。

由式 (2.5.1) 可以看出, 由矢势 \mathbf{A} 可以确定磁场 \mathbf{B} 。但是由磁场 \mathbf{B} 并不能唯一地确定矢势 \mathbf{A} 。

例如: 沿 z 轴方向的均匀磁场 B_0 , B_0 为常数, 求矢势 \mathbf{A} 。

已知 $B_x = B_y = 0$, $B_z = B_0$, 确定矢势 \mathbf{A} , 根据 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= B_z = B_0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

不难看出, 有解 (1) $A_z = A_y = 0$, $A_x = -B_0 y$, $\mathbf{A} = -B_0 y \mathbf{e}_x$;

还可以有另一解 (2) $A_z = A_x = 0$, $A_y = B_0 x$, $\mathbf{A} = B_0 x \mathbf{e}_y$ 。

还存在其他的解。

一般来说, 若 \mathbf{A} 是磁场 \mathbf{B} 的矢势, 那么 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$ 也是同一个 \mathbf{B} 的矢势, ψ 为任意连续可微的标量函数。

因为

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi$$

而 $\nabla \times \nabla \psi = 0$, 则有

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

即 $\mathbf{A} + \nabla \psi$ 与 \mathbf{A} 对应同一个磁场 \mathbf{B} , 也就是说, 对于一个磁场 \mathbf{B} , \mathbf{A} 不是唯一的, 它可以相差一个任意标量函数的梯度, 这表示对任一给定磁场 \mathbf{B} , 矢势可按照下列方式变换到 \mathbf{A}' 。

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (2.5.2)$$

这种变换称为规范变换。只要按照这种形式，不管变换多少次，可以得出同样的物理结果。这说明磁场具有规范变换下的不变性。

既然 \mathbf{A} 存在规范变换这样的任意性，可以对 \mathbf{A} 加上一个限制条件，使得问题简化。实际上可以这样理解， ψ 是任意标量函数，可选一个特定的 ψ 使问题简化，即对 ψ 的限制就是对 \mathbf{A} 的限制。通常规定

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.5.3)$$

这个条件称为库仑规范条件。下面说明对 \mathbf{A} 加上限制条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 总是可以的，也就是说，总可以找到一个 \mathbf{A} 满足库仑规范条件。

假设，遇到了一个不满足库仑规范条件的 \mathbf{A}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = u \neq 0$$

可另取一个解 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi = u + \nabla^2 \psi \quad (2.5.4)$$

取 ψ 为泊松方程 $\nabla^2 \psi = -u$ 的一个解，用这样的 \mathbf{A} 去做规范变换，那么变换后的 \mathbf{A}' 满足

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi = u - u = 0$$

而且这个 \mathbf{A}' 不影响物理结果。以下所取的矢势 \mathbf{A} 都满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。

2.5.2 矢势的微分方程

静磁场基本方程之一

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (2.5.5)$$

对各向同性非铁磁介质 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ，均匀介质 $\mu = \text{常数}$ 。

可以写成

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (2.5.6)$$

将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入式 (2.5.6) 可得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

若取矢势 \mathbf{A} 满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，可得到关于 \mathbf{A} 的微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (2.5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

注意式 (2.5.7) 是矢量方程，如果写分量式，在直角坐标系中

$$\nabla^2 A_i = -\mu j_i \quad (i=1,2,3) \quad (2.5.8)$$

每个直角分量 A_i 满足泊松方程。这些分量方程和静电场中电势 φ 的方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

有相同的形式，即数学上是类似的，静电场中泊松方程的特解为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

对比静电势的解, 可写出矢势方程式 (2.5.8) 的特解为

$$A_i(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_i(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.5.9)$$

写成矢量式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.5.10)$$

式 (2.5.10) 就是 2.2 节中用毕奥-萨伐尔定律推导出的公式 (2.2.9) (当时是真空的情况), 并且当时已证明 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。因此, 式 (2.5.10) 确实是矢势微分方程的解。

在 2.2 节中, 从毕奥-萨伐尔定律出发, 导出静磁场的微分方程, 本节把磁场的散度与磁场的旋度作为基本定律, 引入矢势 \mathbf{A} , 由 \mathbf{A} 满足的微分方程获得特解

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

\mathbf{A} 被确定后再取旋度即可求出 \mathbf{B} 。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V (\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

对于线电流分布

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{Id\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

这就是毕奥-萨伐尔定律。

下面举例由矢势 \mathbf{A} 求磁场 \mathbf{B} 。

【例 2-4】 应用矢势 \mathbf{A} , 求在空气中长直载流细导线的磁场。

解: (1) 先求导线外任一点 P 的矢势 \mathbf{A}

如图 2-15 所示, P 点的坐标是 $(x, y, 0)$, 取导线沿 z 轴, P 点到导线的垂直距离为 r , 设导线中电流为 I , 电流元 Idz 到 P 点的距离为 $\sqrt{r^2 + z^2}$ 。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idz}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{e}_z$$

这个积分是发散的, 通常选取有限的两点积分, 可以选从 $-L$ 到 L 的积分, 因为 \mathbf{A} 的方向即电流方向, 此时电流 I 沿 z 方向, 则有

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{e}_z$$

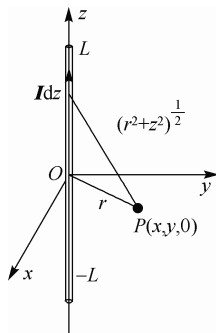


图 2-15 例 2-4 图

$$= \left\{ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(L + \sqrt{r^2 + L^2}) - \ln r \right] \right\} \mathbf{e}_z$$

当 $L \gg r$ 时, $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} \mathbf{e}_z$ 。

(2) 由矢势求出磁场 \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

利用柱坐标系求旋度的式 (0.4.4), 已知 $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} \mathbf{e}_z$, 只有 z 分量, $A_r = A_\phi = 0$, 则

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\phi \quad (A_z \text{ 仅与 } r \text{ 有关}) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{2L} \cdot 2L \left(-\frac{1}{r^2} \right) \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

写成矢量式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

还可以用另外一种方法

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} \mathbf{e}_z \right)$$

令 $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} = \phi$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{f}$, 利用式 (0.6.5) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} \right) \times \mathbf{e}_z + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{r} \nabla \times \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

可见, 两种方法得到的结果是相同的。

2.5.3 A-B 效应

由于静磁场是无源有旋场, 从数学上引进了矢势 \mathbf{A} , 但是 \mathbf{A} 不是唯一确定的, 没有直接的观测意义, 经典电动力学认为, 有意义的是矢势 \mathbf{A} 的线积分, 即矢势与磁通量的关系

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

在量子力学中, \mathbf{A} 具有可观测的物理效应, 20 世纪 60 年代, 实验证实了阿哈罗诺夫 (Aharonov) 和玻姆 (Bohm) 提出的设想, 即 \mathbf{A} 可以直接影响体系的量子行为。

如图 2-16 所示, 电子束 K 射向双缝, 缝后放一无限长密绕螺线管, 电子穿过双缝后被一

透镜聚焦在屏 y 上, 螺线管上加以电压, 以保证电子只在螺线管外飞行。这样电子的行为仅与管外空间性质有关, 起初螺线管不通电流, 当然管内外的 \mathbf{B} 和 \mathbf{A} 均为零。电子的行为用波函数表示, 由于两束电子有相位差, 在屏上得到一幅干涉图像。然后螺线管通以电流, 这时也可得到一幅干涉图像, 但其干涉条纹的极值位置较前一幅有了变动, 此时管外仍是 $\mathbf{B}=0$, 但 $\mathbf{A}\neq 0$ 。因此 \mathbf{A} 对电子的量子行为产生了影响, 即矢势 \mathbf{A} 也具有可观测的物理效应。这一效应称为阿哈罗诺夫和玻姆效应, 简称为 A-B 效应。

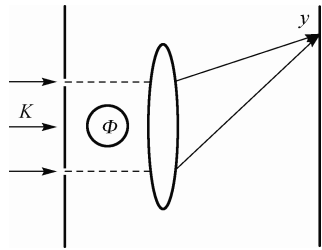


图 2-16 A-B 效应

2.6 磁 矢 势 法

与静电场类似, 将介绍求解静磁场边值问题的两种基本解法: 磁矢势法与磁标势法。

磁矢势法是求解矢势 \mathbf{A} 满足的微分方程 $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$, 然后用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 计算 \mathbf{B} 。需要先导出关于 \mathbf{A} 的边值关系。

磁场的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha}_f \end{aligned}$$

利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 可得

$$\mathbf{n} \cdot [(\nabla \times \mathbf{A}_2) - (\nabla \times \mathbf{A}_1)] = 0 \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{n} \times \left[\frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \mathbf{A}_2) - \frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \right] = \boldsymbol{\alpha}_f \quad (2.6.2)$$

对铁磁介质, 式 (2.6.2) 为

$$\mathbf{n} \times [(\nabla \times \mathbf{A}_2) - (\nabla \times \mathbf{A}_1)] = \mu_0 [\boldsymbol{\alpha}_f + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)] \quad (2.6.3)$$

还可写出另一种形式 \mathbf{A} 的边值关系, 将 $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 应用于两种介质界面的一个狭长回路上

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \Delta \mathbf{l}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 回路所包围面积趋于零, 即

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

则有

$$(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0$$

$\Delta \mathbf{l}$ 是任意的, 可写成

$$\mathbf{A}_{1t} = \mathbf{A}_{2t}$$

\mathbf{A} 的切线分量是连续的, 写成矢量式

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 \quad (2.6.4)$$

若取库仑规范条件, 将 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 应用于两种介质界面上小圆柱包面上, 当高度 $h \rightarrow 0$ 时, 可推出

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = 0 \quad (2.6.5)$$

将式 (2.6.4) 与式 (2.6.5) 合起来有

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \quad (2.6.6)$$

式 (2.6.6) 表示在分界面上矢势 \mathbf{A} 是连续的, 可以用式 (2.6.6) 代替式 (2.6.1), 此外由于

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [\nabla \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)] &= \nabla [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)] - (\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \\ &= -\frac{\partial}{\partial n}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \end{aligned}$$

式 (2.6.3) 可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial n}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = -\mu_0 [\boldsymbol{\alpha}_f + \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)] \quad (2.6.7)$$

可用式 (2.6.7) 代替式 (2.6.3)。

【例 2-5】 恒定电流 I 在半径为 a 无限长圆柱形磁导率为 μ_1 的导电磁介质中流动, 其外充满磁导率为 μ_2 的均匀介质。求空间的矢势和磁场。

解: 根据问题的对称性, 选择柱坐标系, 以导体轴为 z 轴。由于电流密度 \mathbf{j} 处处沿 z 方向, 矢势 \mathbf{A} 只有 z 分量

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z, \quad A_r = A_\phi = 0$$

设圆柱体内矢势为 A_1 , 圆柱体外为 A_2 , A_1 与 A_2 满足的方程为

$$\nabla^2 A_1 = -\mu_1 j \quad (r < a)$$

$$\nabla^2 A_2 = 0 \quad (r > a)$$

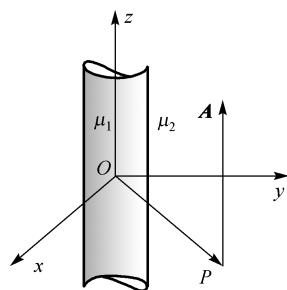


图 2-17 例 2-5 图

A_1 、 A_2 只与 r 有关, 与 z 、 ϕ 无关。

导体内、外各向均匀, 故可分区求解:

$$\text{在柱内} \quad \nabla^2 A_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_1 \frac{I}{\pi a^2} \quad (r < a)$$

$$\text{在柱外} \quad \nabla^2 A_2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0 \quad (r > a)$$

积分一次得

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dr} &= -\frac{\mu_1 I r}{2\pi a^2} + \frac{b}{r} \\ \frac{dA_2}{dr} &= \frac{f}{r} \end{aligned}$$

再积分一次

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi a^2} r^2 + b \ln r + c$$

$$A_2 = f \ln r + g$$

式中, A_1 、 A_2 为通解, 其中 b 、 c 、 f 、 g 为待定系数。

边界条件和边值关系为

(1) $r=0$ 处, A_1 有限;

(2) $r=a$ 处, $A_1 = A_2$;

(3) $r=a$ 处, $\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial r} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial r}$ 。

边值关系 (3) 是由式 (2.6.2) 导出的, 推导如下。

由于电流沿 z 轴方向, \mathbf{B} 只有 \mathbf{e}_ϕ 分量, 则 $\nabla \times \mathbf{A}$ 只有 \mathbf{e}_ϕ 分量。

在柱坐标系中

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\phi$$

将上式代入式 (2.6.2) 得到

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial r} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial r} = -\alpha$$

圆柱表面无面电流分布, $\alpha=0$, 则有

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial r}$$

由边值关系 (1) 可得

$$b=0$$

由边值关系 (3) 可得

$$f = -\frac{\mu_2 I}{2\pi}$$

由边值关系 (2) 可得

$$g = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln a - \frac{\mu_1 I}{4\pi} + C$$

将 b 、 f 、 g 代入 A_1 、 A_2 的通解可得

$$A_1 = -\frac{\mu_1 I}{4\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + C \quad (r < a)$$

$$A_2 = -\left(\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} + \frac{\mu_1 I}{4\pi} \right) + C \quad (r > a)$$

$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{e}_z$$

C 为任意常数, 不影响计算 \mathbf{B} 。

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = -\frac{dA_1}{dr} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_1 I}{2\pi a^2} r \mathbf{e}_\phi \quad (r < a)$$

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = -\frac{dA_2}{dr} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (r > a)$$

2.7 磁标势法

对于磁场来说, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 总是成立的, 所以总可以引入矢势 \mathbf{A} , 因此矢势法是一种标准的普遍适用的方法。但由于矢势方程涉及三个分量的微分方程, 求解比较复杂。在一些特定的条件下, 可以引入磁标势, 求解磁标势所满足的微分方程得到磁场分布, 而使问题简化, 这种方法称为磁标势法。

2.7.1 引入磁标势的条件

如果在空间的某个区域内没有传导电流 \mathbf{j}_f , 根据磁场安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

根据矢量场论则有

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

可以引入一个标量函数 φ_m , 使 φ_m 满足

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m \quad (2.7.1)$$

φ_m 称为磁标势。

可以引入磁标势的条件为, 在空间某个区域内, 所有回路都满足

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.7.2)$$

在实际问题中, 如图 2-18 (a) 所示, I 是一闭合回路电流, L 是电流之外的区域中的任意一条环绕 I 的闭合回路, 虽然 L 所在的区域内各点 $\mathbf{j}_f = 0$, 但是 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, 可见, 满足式 (2.7.2) 的闭合回路不切割电流, 即没有链环着电流。

如果用一个闭合曲面 S' 将电流 I 包起来, 如图 2-18 (b) 所示。仅将 S' 以外的空间作为讨论的空间, 那么 L 在此空间就不可能存在, 因此, 对这一空间区域中任意一条闭合曲线, 如 L_1 、 L_2 都满足引入磁标势的条件。在 S' 外的空间可以引入磁标势, 从物理上看, 相当于把原来闭合的磁场线割断了, 使磁场线变成了有始有终的。从剩下的空间来看, 磁场线从壳层的上部发出, 终止于下部, 因而磁场成了无旋场, 与静电场相似, 可以引入磁标势。必须注意, 只把电流本身挖掉还不能引入, 必须把电流圈围成的壳层全部挖去。

例如一个线圈, 如果挖去线圈所围着的环形区域 S' , 则在剩下的空间中, 任意闭合回路都不会链环着电流。因此在除去这个壳形区域之后, 在空间中就可以引入磁标势来描述磁场。

又例如电磁铁两磁板间隙处, 可引入磁标势。永久磁铁的磁场是分子电流激发的, 没有任何传导电流。因此全部永久磁铁的磁场 (包括磁铁内部) 都可以用磁标势来描述。

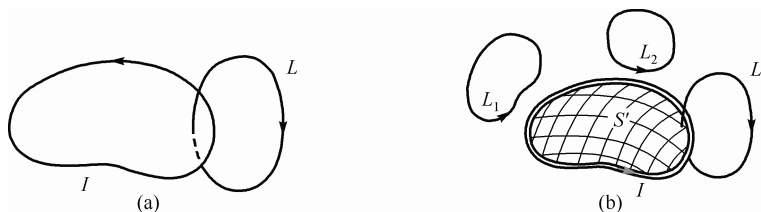


图 2-18 引入磁标势条件示意图

2.7.2 磁标势的微分方程

在 $\mathbf{j}=0$ 的区域内，磁场满足方程

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.7.4)$$

注意这里不写 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ，而写成 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 。这是因为磁标势法的一个重要应用是求磁铁的磁场，而在铁磁性物质中，线性关系 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 不成立，而 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ 是普遍成立的。由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，及 $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ ，可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

此时可写出静磁场方程为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= -\nabla \cdot \mathbf{M}\end{aligned}\quad (2.7.5)$$

如果与静电场方程对比

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (2.7.6)$$

可以想象方程 $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ 的右边应该是一种“荷”密度，为此引入假想的“等效磁荷”。定义假想磁荷密度

$$\rho_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (2.7.7)$$

此处“假想的磁荷密度”、“等效磁荷”要区别于电像法中的“像电荷”。像电荷也是“等效的”、“假想的”，但是本质上是等效极化电荷、感应电荷的效应。而 ρ_M 仅在形式上处在磁荷密度的地位，并不是真正的磁荷，是磁介质内部磁化现象的等效描述，类似于位移电流，有电流之名，无电流之实，实质上是电场的变化。

当 $\mathbf{j}=0$ 时，静磁场方程 (2.7.5) 为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{\rho_M}{\mu_0}\end{aligned}\quad (2.7.8)$$

与静电场方程类比，区别仅在于没有自由磁荷。 $\rho_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$ 是与 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 对应的，

这是由于磁荷是由分子电流的磁偶极矩假想来的, 而自由磁荷密度是不存在的, 即独立的正负磁荷(磁单极)是不存在的, 组成磁铁的最小单元就是分子电流。进一步说, 在以上的推导过程中, 利用了 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。而这是自然界不存在磁荷的数学表示, 正因为没有磁荷, 才能得到 $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$, 有可能引入这个假想磁荷 $\rho_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$ 。

引入假想的磁荷密度 ρ_M 后, 类似于静电场, 可得到 φ_m 满足的微分方程。将 $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ 代入式(2.7.8)可得到

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_M}{\mu_0} \quad (2.7.9)$$

式(2.7.9)称为磁标势的泊松方程。

下面写出磁标势 φ_m 满足的边值关系

根据

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f$$

可得

$$\mathbf{n} \times (\nabla \varphi_{m2} - \nabla \varphi_{m1}) = -\boldsymbol{\alpha}_f$$

当 $\boldsymbol{\alpha}_f = 0$ 时

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (2.7.10)$$

根据

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

即 $B_{1n} = B_{2n}$, 可得

$$H_{2n} - H_{1n} = -(M_{2n} - M_{1n})$$

令

$$\sigma_m = -\mu_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \quad (2.7.11)$$

$$H_{2n} - H_{1n} = \frac{\sigma_m}{\mu_0}$$

σ_m 为介质分界面上磁荷面密度。

即对于铁磁质, 边值关系为

$$\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0} \quad (2.7.12)$$

对于非磁性介质, 此时 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 边值关系为

$$\mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \quad (2.7.13)$$

把磁标势法中有关静磁场公式和静电场公式进行对比列表, 如表 2-2 所示。

表 2-2 静磁场和静电场的公式对比

静电场	静磁场
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_M}{\mu_0}$
$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$	$\rho_M = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

续表

静电场	静磁场
$E = -\nabla\varphi$	$H = -\nabla\varphi_m$
$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0}$	$\nabla^2\varphi_m = -\frac{\rho_M}{\mu_0}$
边值关系 $\varphi_1 = \varphi_2$ $\varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma_f$	边值关系 $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$ (当 $\alpha_f = 0$ 时) $\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0}$ (铁磁质) $\mu_2 \frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}$ (非铁磁质)

可以看出, 磁标势法中有关磁场的公式与静电场公式完全类似, 因此可以将静电场中求静电势 φ 的方法移植到求解磁标势 φ_m 的问题中。

【例 2-6】 半径为 R_0 的均匀磁化铁球, 其磁化强度为 M_0 , 求其空间的磁场。

解: 由于空间无传导电流, 可用磁标势法求解

铁球内和铁球外分为两个区域:

球外真空

$$M = 0 \quad \rho_M = 0$$

球内均匀磁化

$$M = M_0 \quad \rho_M = -\mu_0 \nabla \cdot M_0 = 0$$

因此磁荷只分布在铁球表面上。球外磁标势 φ_{m2} 和球内磁标势 φ_{m1} 都满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \quad (r < R_0)$$

$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad (r > R_0)$$

取原点于球心, 极轴沿着磁化方向, 即 M_0 沿 z 轴, 则问题具有轴对称性。方程的解为

$$\varphi_{m1} = \sum_n \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m2} = \sum_n \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

边界条件与边值关系

(1) 球内 $r=0$ 处, φ_{m1} 有限;

(2) 球外 $r \rightarrow \infty$ 处, $\varphi_{m2} \rightarrow 0$;

(3) 球面上 $r=R_0$ 处

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad (2.7.14)$$

$$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r} = -\frac{\sigma_m}{\mu_0}, \quad \sigma_m = -\mu_0 \mathbf{e}_r \cdot (M_2 - M_1), \quad \text{其中 } M_2 = 0, \quad M_1 = -M_0。$$

则有

$$\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r} - \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \cdot (-M_0) = -M_0 \cos\theta \quad (2.7.15)$$

由 (1) 可得: $b_n = 0$;

由(2)可得: $c_n = 0$;

由(3)中式(2.7.14)可得

$$\sum_n \frac{d_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_n a_n R_0^n P_n(\cos \theta)$$

由(3)中式(2.7.15)可得

$$-\sum_n \frac{(n+1)d_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) - \sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) = -M_0 P_1(\cos \theta)$$

比较 $P_n(\cos \theta)$ 的系数得:

$$\begin{aligned} -\frac{2d_1}{R_0^3} - a_1 &= -M_0 \\ \frac{d_1}{R_0^2} &= a_1 R_0 \end{aligned}$$

可解出 $d_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3$, $a_1 = \frac{1}{3} M_0$, $a_n = d_n = 0$ ($n \neq 1$)。

则

$$\varphi_{m1} = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta = \frac{1}{3} \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (r < R_0)$$

$$\varphi_{m2} = \frac{1}{3} R_0^3 \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (r > R_0)$$

由 $\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m$ 可求出磁场强度

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla \varphi_{m1} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}_0 \quad (r < R_0)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla \varphi_{m2} = -\frac{1}{3} R_0^3 \nabla \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (r > R_0)$$

根据式(0.6.33), 可以得到

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} R_0^3 \nabla \left(\frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{3} R_0^3 \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{M}_0 r^2}{r^5} \right] \quad (r > R_0)$$

铁球的体积为 $\frac{4}{3} \pi R_0^3$, 磁矩为 $\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \mathbf{M}_0$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{m} r^2}{r^5} \right]$$

在球外

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2$$

在球内

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{M}_0)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \left(-\frac{1}{3} \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_0 \right) = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}_0 \quad (r < R_0)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - m^2 \mathbf{r}^2}{r^5} \right] \quad (r > R_0)$$

结果表明:

(1) 球内为均匀磁场。 \mathbf{B} 的方向与 \mathbf{M}_0 的方向相同;

(2) 球外的磁场和处在球心的磁矩为 $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \mathbf{M}_0$ 的磁偶极子产生的磁场相同;

(3) \mathbf{B} 与 \mathbf{H} 的分布如图 2-19 所示。

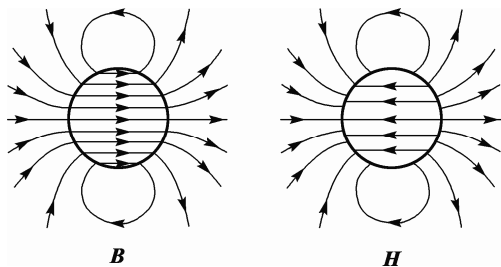


图 2-19 磁化铁球的 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的分布

由图可见, 球内 \mathbf{B} 线与 \mathbf{H} 线方向相反。 \mathbf{B} 线总是闭合的, 而 \mathbf{H} 线不闭合。

【例 2-7】 有一个均匀带电的薄导体壳, 其半径为 R_0 , 总电荷为 Q 。今使球壳绕自身某一直线以角速度 ω 转动, 求球内、外的磁场分布。

解法 1 磁标势法

坐标原点取在球心上, 设球壳绕 z 轴转动, 球面上的自由电荷分布为 $\sigma_f = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$, 由于导

体球壳旋转时, 在球壳表面形成环形的面电流分布, 如图 2-20 所示, 这些电流产生磁场。在球壳表面形成的面电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_f = \sigma_f \mathbf{v} = \frac{Q}{4\pi R_0^2} \omega \mathbf{e}_z \times R_0 \mathbf{e}_r$$

在球坐标系中, $\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi$, 则有

$$\boldsymbol{\alpha}_f = \frac{Q}{4\pi R_0} \omega \sin\theta \mathbf{e}_\phi$$

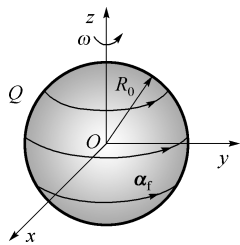


图 2-20 例 2-7 图

设球壳内外均为真空。球内、外均无磁荷分布, 因而球内外磁标

势均满足方程 $\nabla^2 \varphi_m = 0$, 球壳绕 z 轴旋转, 具有轴对称性, 则球内、外磁标势分别为

$$\varphi_{m1} = \sum \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \quad (r > R_0)$$

$$\varphi_{m2} = \sum \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \quad (r < R_0)$$

考虑到, $r \rightarrow \infty$, $\varphi_{m1} \rightarrow 0$, $\varphi_{m1} = \sum \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$;

$$r \rightarrow 0, \varphi_{m2} \text{ 有限, } \varphi_{m2} = \sum c_n r^n P_n(\cos\theta);$$

在 $r = R_0$ 的界面上, 边值关系为

$$(1) \text{ 由 } B_{1n} = B_{2n} \text{ 可写出, } \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial r};$$

$$(2) \text{ 由 } H_{2t} - H_{1t} = \alpha_f = \frac{Q\omega}{4\pi R_0} \sin \theta, \text{ 可写出 } -\frac{1}{R_0} \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \theta} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \theta} = \frac{Q\omega}{4\pi R_0} \sin \theta。$$

由 (1) 可得

$$nc_n R_0^{n-1} = -\frac{n+1}{R_0^{n+2}} b_n$$

$$n=0, b_0=0$$

$$n=1, c_1 = -\frac{2b_1}{R_0^3}$$

$$n>1, c_n = -\frac{(n+1)b_n}{nR_0^{2n+1}}$$

$$\text{由 (2) } -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \theta} = -\frac{Q\omega}{4\pi} \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta} \text{ 可得}$$

$$-\sum \frac{b_n}{R_0^{n+1}} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} + \sum c_n R_0^n \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{Q\omega}{4\pi} \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}$$

比较等式两边系数关系可得

$$n=1, -\frac{b_1}{R_0^2} + c_1 R_0 = -\frac{Q\omega}{4\pi}, c_0=0$$

$$n>1, c_n = \frac{b_n}{R_0^{2n+1}}$$

因而可以解出

$$c_0 = b_0 = 0, c_n = b_n = 0 (n \neq 1), b_1 = \frac{Q\omega R_0^2}{12\pi}, c_1 = -\frac{Q\omega}{6\pi R_0}。$$

则有

$$\varphi_{m1} = \frac{Q\omega R_0^2}{12\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{Q\omega R_0^2}{12\pi} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}, \text{ 其中 } \mathbf{m} = \frac{QR_0^2}{3} \boldsymbol{\omega} \quad (r > R_0)$$

$$\varphi_{m2} = -\frac{Q\omega}{6\pi R_0} r \cos \theta = -\frac{Q}{6\pi R_0} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \quad (r < R_0)$$

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla \varphi_{m1} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (r > R_0)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla \varphi_{m2} = \frac{Q}{6\pi R_0} \nabla (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{6\pi R_0} \quad (r > R_0)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (r > R_0)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R_0} \boldsymbol{\omega} \quad (r > R_0)$$

计算结果表明, 均匀带电绕自身某一直径旋转的导体球壳内的磁场是一个均匀磁场, 球壳外磁场是一个磁矩为 \mathbf{m} 的磁偶极子产生的磁场。

解法 2 矢势法

矢势微分方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

$\mathbf{j} = j\mathbf{e}_\phi$ 表示电流沿球面纬线流动, 须先求出 $\nabla^2 \mathbf{A}$ 在球面坐标系中 \mathbf{e}_ϕ 方向上的分量表达式。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

取库仑规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 则有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

利用式 (0.4.5) 对 \mathbf{A} 求两次旋度可得

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r(\nabla \times \mathbf{A})_\theta] - \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \times \mathbf{A})_r \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \right\} \end{aligned}$$

一个沿纬线流动的圆电流激发的矢势 \mathbf{A} 只有 \mathbf{e}_ϕ 分量

$$\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta) \mathbf{e}_\phi$$

A_ϕ 只依赖于 r 、 θ , 而与 ϕ 无关, 即 $A_r = A_\theta = 0$, $A_\phi = A_\phi(r, \theta)$, 则上式变为

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = [-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \right]$$

化简后可得

$$(\nabla^2 A)_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

球内、外可分为两个区域, 球外区域矢势 $A_{1\phi}$ 与球内矢势 $A_{2\phi}$, 球内和球外均无电流分布, 都满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (2.7.16)$$

在 $r = R_0$ 的球面上, 有边值关系

$$(1) \quad A_{1\phi} = A_{2\phi};$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} (A_{2\phi} - A_{1\phi}) \right|_{r=R_0} = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi R_0} \sin \theta.$$

由于球壳表面面电流密度是按 $\sin\theta$ 规律变化的, 方程 $\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0$ 应该有下面形式的特解

$$A_\phi = R(r) \sin \theta \quad (2.7.17)$$

将方程的解式 (2.7.17) 代入式 (2.7.16) 中可得

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - 2R = 0$$

方程的解为

$$R = ar + \frac{b}{r^2}$$

考虑在球外 $r \rightarrow \infty$, $A_{1\phi} \rightarrow 0$, 球内 $r \rightarrow 0$, $A_{2\phi}$ 有限, 则有

$$A_{1\phi} = \frac{b}{r^2} \sin \theta \quad (r > R_0)$$

$$A_{2\phi} = ar \sin \theta \quad (r < R_0)$$

利用边值关系 (1)、(2) 分别可得

$$\frac{b}{R_0^2} = aR_0$$

$$2aR_0 + \frac{b}{R_0^2} = \frac{\mu_0 Q \omega}{4\pi}$$

联立求解

$$a = \frac{\mu_0 Q \omega}{12\pi R_0}, \quad b = \frac{\mu_0 Q \omega}{12\pi} R_0^2$$

则有

$$A_{1\phi} = \frac{b}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 Q \omega R_0^2}{12\pi r^2} \sin \theta \quad (r > R_0)$$

$$A_{2\phi} = ar \sin \theta = \frac{\mu_0 Q \omega}{12\pi R_0} r \sin \theta \quad (r < R_0)$$

写成矢量形式分别为

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 Q R_0^2}{12\pi} (\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}) \quad (r > R_0)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R_0} \omega r \sin \theta = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R_0} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (r < R_0)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 Q R_0^2}{12\pi} \left[-\frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} + \frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (r > R_0)$$

其中 $\mathbf{m} = \frac{1}{3}QR_0^2\boldsymbol{\omega}$ 。

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R_0} \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R_0} \boldsymbol{\omega} \quad (r < R_0)$$

本例用两种方法求解得到了相同的结果。比较两种方法，磁标势法简单，而矢势法数学处理过程很复杂，因此可用磁标势法处理的问题尽量用磁标势法。另外，本例是旋转对称的三维问题，这种问题用矢势法求解时，矢势 \mathbf{A} 满足的方程与边值关系可总结如下。

对于旋转对称的三维问题，所谓旋转对称是指电流是环形的，即电流沿球面纬线流动，并且是旋转对称的。假设电流密度在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中按下述分布

$$\mathbf{j} = j(r, \theta)\mathbf{e}_\phi$$

一个沿纬线流动的圆电流激发的矢势只有 \mathbf{e}_ϕ 分量，这时的矢势 \mathbf{A} 也只有 A_ϕ 的分量，即

$$\mathbf{A} = A_\phi(r, \theta)\mathbf{e}_\phi$$

利用 $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 可以证明 $\nabla^2 \mathbf{A}$ 在球坐标系中的各分量为

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}$$

于是可以得到球坐标系中的旋转对称三维问题的矢势方程

$$\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\mu j(r, \theta) \quad (2.7.18)$$

在分界面上的边值关系

$$A_{1\phi} = A_{2\phi} \quad (2.7.19)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{2\phi}) - \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{1\phi}) = -\alpha_f \quad (2.7.20)$$

2.8 磁多极矩

2.8.1 矢势的多级展开式

在讨论静电场时，如果电荷只分布于小区域内，而要求远处的电势时，可将给定电荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ 激发的电势

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

中 $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ 做泰勒展开, 得到 φ 的多项展开式, 展开式的一级近似为点电荷势, 二级近似为电偶极矩势等。

如果恒定电流仅分布于小区域内, 要求远处的磁场时, 采用同样的方法将给定电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ 激发的磁场矢势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

将 $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ 做泰勒级数展开, 得到磁场矢势的多项展开式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \right] dV' \quad (2.8.1)$$

只取一级小量 \mathbf{r}' , 高阶小量均略去。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} dV' + \dots \\ &= \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

式 (2.8.2) 是矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的多项展开式, 将第二项的后部略去。假定 V' 中只有小载流闭合线圈, 其电流为 I , 由于恒定电流可以分成许多闭合流管, 我们先就一个闭合线圈情形讨论式 (2.8.2), 对一个闭合线圈来说

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \oint_L I d\mathbf{l}' = I \oint_L d\mathbf{l}'$$

则式 (2.8.2) 中

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_L d\mathbf{l}' \quad (2.8.3)$$

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}' \quad (2.8.4)$$

先看第一项, 即式 (2.8.3), 恒定电流总是闭合的, $\oint_L d\mathbf{l}' = 0$ 。

因此

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_L d\mathbf{l}' = 0 \quad (2.8.5)$$

此式表示, 磁场矢势展开式中不含磁单极项, 即不含与点电荷对应的项。

展开式的第二项, 即式 (2.8.4)

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}'$$

上式的被积函数中, \mathbf{r} 与积分变量无关, 由于 \mathbf{r}' 为线圈上各点的坐标, 因此 $d\mathbf{r}' = d\mathbf{l}'$, 利用全微分绕闭合回路的积分等于零。

$$\oint_L d[(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}'] = \oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}' + \oint_L \mathbf{r}' (d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{r}) = 0$$

可以得到

$$\oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}' = - \oint_L \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}') \\ A^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \left\{ \oint_L (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l}' - \oint_L \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}') \right\} \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \oint_L \mathbf{r} \times (d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}')$$

令

$$\mathbf{m} = I \oint_L \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}') \quad (2.8.6)$$

\mathbf{m} 是小闭合电流圈的磁矩, 则有

$$A^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.8.7)$$

$A^{(1)}(\mathbf{r})$ 是电流体系的磁偶极矩势, 形式上与静电场中电偶极矩势 $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ 相似。

$\mathbf{m} = I \oint_L \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}')$ 是电流体系的磁矩, 如图 2-21 所示, $\frac{1}{2} (\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}')$ 是阴影表示的三角形面积元矢量 $d\mathbf{S}'$

$$\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{S}' = I\mathbf{S}$$

如果电流体分布为 $I d\mathbf{l}' \rightarrow \mathbf{j} dV'$, 电流体系的磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \quad (2.8.8)$$

展开式的后面各项是磁多极矩激发的矢势, 由于实际问题用得很少, 不做讨论。

现在由磁偶极势 $A^{(1)}(\mathbf{r})$ 来求出磁偶极矩的磁场。

$$\mathbf{B}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (2.8.9)$$

$$\text{利用} \quad \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \nabla \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) \right\}$$

再利用式 (0.6.22) 可得

$$\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{m} + (\nabla \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{r} = 3\mathbf{m} - \mathbf{m} = 2\mathbf{m}$$

又因为

$$\nabla \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = -\frac{3}{r^5} [\mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})] \\ = -\frac{3}{r^5} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})] \\ = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{3\mathbf{m}}{r^3}$$

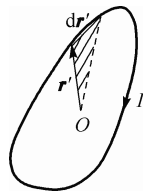


图 2-21 闭合电流圈的磁矩

则有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{3\mathbf{m}}{r^3} \right] \\ \mathbf{B}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right]\end{aligned}\quad (2.8.10)$$

式(2.8.10)为磁偶极矩产生的磁场,它与电偶极矩产生的电场

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]$$

形式上相似。

如果用另一方法讨论

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

利用式(0.6.7)可得

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - (\nabla \cdot \mathbf{m}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{m} \\ \mathbf{B}^{(1)} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}\quad (2.8.11)$$

利用式(0.6.28)可得

$$\begin{aligned}\nabla \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \mathbf{m} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{m} \\ &= (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}$$

式(2.8.11)可以改写成

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)\quad (2.8.12)$$

令

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

与 $\varphi^{(1)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ 相类似

$$\mathbf{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)}\quad (2.8.13)$$

对比磁偶极矩的势与磁偶极矩的磁场和电偶极子势与电偶极子电场公式,可见, \mathbf{m} 与 \mathbf{p} 对应, \mathbf{m} 是闭合电流圈的磁矩,相应的称小闭合电流圈为磁偶极子。也就是说小闭合电流圈可视为由一对正、负磁荷组成的磁偶极子。但实质上绝不是由两个正、负磁荷组成的。对于磁学的研究,宏观上不存在任何单个的磁荷,基本磁单元就是南北极同时存在的磁偶极矩。从 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的展开式(2.8.2)可以看出这一点。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) + \cdots$$

$A^{(0)}(\mathbf{r})=0$ 即不存在对应点电荷的项, $A^{(1)}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$ 为磁偶极势, 矢势 \mathbf{A} 的多级展开式的第一级近似就是磁偶极矩势。

【例 2-8】实验证明: 电子具有自旋磁矩, 其大小为 $9.27\times 10^{-24}\text{J}\cdot\text{T}^{-1}$, 电子的经典半径 $r_0=2.8\times 10^{-15}\text{m}$ 。如果把电子视为匀速转动的带电小球, 且电荷为均匀的体分布。试计算磁矩的大小, 并与试验值比较求出角速度 ω 。

解: 电子的电荷密度
$$\rho=-\frac{e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}=-\frac{3e}{4\pi r_0^3}$$

电流密度
$$\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}=-\frac{3e}{4\pi r_0^3}\mathbf{v}=-\frac{3e}{4\pi r_0^3}r'\sin\theta\omega\mathbf{e}_\phi$$

磁矩

$$\begin{aligned}\mathbf{m}&=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')\text{d}V'=\frac{1}{2}\frac{3e\omega}{4\pi r_0^3}\iiint(r'\sin\theta\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{r}')r'^2\text{d}r'\sin\theta\text{d}\theta\text{d}\phi\\&=-\frac{1}{2}\frac{3e\omega}{4\pi r_0^3}\left\{\int_0^{r_0}r'^4\text{d}r'\int_0^{2\pi}\text{d}\phi\int_0^\pi\sin^3\theta\text{d}\theta\right\}\mathbf{e}_z=-\frac{er_0^2}{5}\omega\end{aligned}$$

以上计算用到 $r'\sin\theta\mathbf{e}_\phi\times r'\mathbf{e}_r=r'^2\sin^2\theta\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_r=r'^2\sin^2\theta\mathbf{e}_z$, $\int_0^\pi\sin^3\theta\text{d}\theta=\frac{4}{3}$ 。

这里选取的电子中心为原点, 旋转轴为 z 轴 (即 ω 方向) 的球坐标。把 r_0 、 \mathbf{m} 的实验值及 $e=1.6\times 10^{-19}\text{C}$ 代入, 则 $\omega\approx 0.4\times 10^{26}\text{s}^{-1}$

$$v=r_0\omega=10^{11}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

这就是电子赤道面上的线速度, 它比光速还大 3 个数量级。因此经典电动力学并不能描写电子的自旋磁矩, 电子的自旋磁矩纯粹是量子现象。

对比磁标势法中磁偶极矩和电偶极矩的公式, 如表 2-3 所示。

表 2-3 磁标势法中磁偶极矩和电偶极矩的对比

静磁场	静电场
$\varphi_m^{(1)}=\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3}$	$\varphi_e^{(1)}=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
$\mathbf{B}^{(1)}=-\mu_0\nabla\varphi_m^{(1)}$	$\mathbf{E}^{(1)}=-\nabla\varphi_e^{(1)}$
$\mathbf{B}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}-\frac{\mathbf{m}}{r^3}\right]$	$\mathbf{E}^{(1)}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}-\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]$

可见, \mathbf{m} 与 \mathbf{p} 对应。 \mathbf{m} 是闭合电流圈的磁矩, 相应的称小闭合电流圈为磁偶极子, 也即小闭合电流圈可以视为由一对正、负磁荷所组成的磁偶极子。

2.8.2 静磁场的能量

静磁场的总能量为

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\text{d}V \quad (2.8.14)$$

由静磁场的基本方程，可以用矢势 \mathbf{A} 和电流 \mathbf{j} 表示静磁场的能量。

类似于静电场能量， $W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ 可以写成 $W_e = \frac{1}{2} \int_V q \phi dV$ 。

静磁场 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ， $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H}$ 。

根据式 (0.6.6)

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

所以

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \left[\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV + \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \right] \quad (2.8.15)$$

利用高斯散度定理将第一项的体积分换成面积分

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

由于积分在无穷远处， $A \propto \frac{1}{r}$ ， $H \propto \frac{1}{r^2}$ ， $dS \propto r^2$ ， $(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 的值 $\propto \frac{1}{r}$ ，所以

$$\oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

则式 (2.8.15) 为

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad (2.8.16)$$

在计算磁场中的总能量时，式 (2.8.14) 与式 (2.8.16) 等效，且只能用于计算整个空间的总能量。由于磁场能量定域于整个磁场内， $\mathbf{j}=0$ 的地方也有磁场能量，所以 $\frac{1}{2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ 不能视为磁场能量密度。

2.8.3 电流系统与外磁场的相互作用能

设小区域的电流密度为 \mathbf{j} ， \mathbf{j} 单独存在时，磁场的矢势为 \mathbf{A} ，产生外磁场的电流密度为 \mathbf{j}_e ， \mathbf{j}_e 单独存在时，磁场的矢势为 \mathbf{A}_e ，由叠加原理，总磁场的矢势为 $(\mathbf{A}_e + \mathbf{A})$ ，磁场的总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} (\mathbf{j}_e + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{A}_e + \mathbf{A}) dV$$

也可认为是两个电流系统 \mathbf{j}_1 与 \mathbf{j}_2

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_1 dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_2 dV_2 + \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_2 dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_1 dV_2 \quad (2.8.17)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_2 dV_1 &= \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_2}{r} dV_2 \right) dV_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2}{r} dV_1 dV_2 \end{aligned} \quad (2.8.17a)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_1 dV_2 &= \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1}{r} dV_1 \right) dV_2 \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2}{r} dV_1 dV_2
 \end{aligned} \quad (2.8.17b)$$

式 (2.8.17a) 与式 (2.8.17b) 相等, 所以磁场的总能量式 (2.8.17) 为

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_1 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_2 dV + \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_1 dV_2 \quad (2.8.18)$$

式 (2.8.18) 中, 第一项 $\frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{A}_1 dV$ 表示电流系统 \mathbf{j}_1 的固有能量, 第二项 $\frac{1}{2} \int_{V_2} \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{A}_2 dV$ 表示电流系统 \mathbf{j}_2 的固有能量, 第三项是两个电流系统的相互作用能。因此, 一个电流系统与外磁场的相互作用能为

$$W_i = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e dV \quad (2.8.19)$$

2.8.4 磁偶极子在外磁场中的相互作用能

设外磁场 \mathbf{B}_e 的矢势为 \mathbf{A}_e , 电流系统 \mathbf{j} 在外磁场中的相互作用能为

$$W_i = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_e dV$$

磁偶极子即一个小闭合电流线圈。把 $\mathbf{j} dV \rightarrow I d\mathbf{l}$

$$W_i = I \oint_L \mathbf{A}_e \cdot d\mathbf{l} = I \int_S \mathbf{B}_e \cdot d\mathbf{S} \quad (2.8.20)$$

S 为线圈所包围的一个曲面。

计算小区域内电流分布在外磁场中的能量, 取原点在线圈所包围区域的适当点上, 将 \mathbf{B}_e 在原点展开

$$\mathbf{B}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_e(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}_e(0) + \dots$$

将上式代入式 (2.8.20), 则有

$$W_i = I \mathbf{B}_e(0) \cdot \int_S d\mathbf{S} + \dots = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e(0) \quad (2.8.21)$$

式中, $\mathbf{m} = I \int_S d\mathbf{S}$ 。

式 (2.8.21) 表示磁偶极子在外磁场中的相互作用能。

当小线圈中的电流强度保持不变时, 其磁偶矩 \mathbf{m} 也保持不变, 在这种情况下, 小电流线圈所受的力和力矩

$$\mathbf{F} = \nabla W_i = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e) = \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}_e \quad (2.8.22)$$

这里用到 $\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}_e) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e) - \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{B}_e = 0$, 对于稳定的外磁场, 在小区域电流附近 $\nabla \times \mathbf{B}_e = 0$, 这是由于产生磁场的电流一般都不出现在磁矩 \mathbf{m} 所在的区域内。

$$L = \frac{\partial W_i}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e) = \frac{\partial}{\partial \theta}(m B_e \cos \theta) = -m B_e \sin \theta$$

写成矢量形式

$$\mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_e \quad (2.8.23)$$

负号表示力矩有使 θ 减小的趋势。式 (2.8.21) 与式 (2.8.22) 表明在均匀外磁场中, 磁偶极子不受力作用, 只有力矩使磁偶极子转向外磁场方向。

在静电场中, 电偶极子所受力和力矩

$$\mathbf{F} = -\nabla W_i$$

$$L = -\frac{\partial W_i}{\partial \theta}$$

在形式上与磁偶极子的受力和力矩相类似, 但磁偶极子取正号, 电偶极子取负号。这是由于, 当磁偶极子在外磁场中转动或运动时, 由于电磁感应, 线圈中要产生感生电动势, 要保持电流不变, 外加电动势必须做功。而在静电情况下, 电场对电偶极子做功就等于它们相互作用能的减少。

【例 2-9】 有一块磁矩为 \mathbf{m} 的小永磁体位于一块磁导率非常大的介质的平坦界面附近的真空中, 求作用在小永磁体上的力。

解: 磁导率非常大的介质表面为等磁势面, 且其表面非常大, 可以视为无穷大表面。可以用类似电象法的方法求解。

设: \mathbf{m} 与介质表面法向方向的夹角为 θ , 与介质平面距离为 a 。

由于 $\mu \rightarrow \infty$ 的介质表面为等磁势面, 所以 \mathbf{m} 的像 \mathbf{m}'

与平面的距离也为 a , 与平面法向的夹角为 $-\theta$, 且有

$|\mathbf{m}| = |\mathbf{m}'|$, 如图 2-22 所示。

\mathbf{m} 处于 \mathbf{m}' 的磁场中, 它们的相互作用能为

$$W_i = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

\mathbf{B} 是 \mathbf{m}' 在 \mathbf{m} 处产生的磁场。

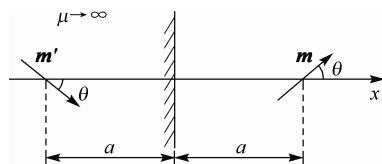


图 2-22 例 2-9 图

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}'}{r^3} \right]$$

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}'}{r^3} \right] \cdot \mathbf{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}' \cdot \mathbf{m}}{r^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3m^2 \cos^2 \theta - m^2 \cos 2\theta}{r^3} \right] = \frac{m^2 \mu_0}{4\pi r^3} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

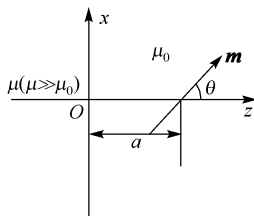
小永磁体所受的力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla W_i = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi} (1 + \cos^2 \theta) \nabla \frac{1}{r^3} \bigg|_{r=2a} \\ &= -\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

负号表示小永磁体受到吸引力。

习 题

- 2.1 证明均匀磁介质内部, 在恒定情况下, 磁化电流 \mathbf{j}_M 总等于自由电流 \mathbf{j}_f 的 $\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)$ 倍。
- 2.2 外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱, 沿轴向流有恒定均匀自由电流 \mathbf{j}_f , 导体的磁导率为 μ 。求磁感强度和磁化电流。
- 2.3 试求磁场强度 \mathbf{H} 的法向分量边值关系, 电位移矢量 \mathbf{D} 的切向分量边值关系, 以及无面电流分布时磁感强度 \mathbf{B} 的切向分量边值关系。
- 2.4 试用边值关系证明: 在绝缘介质与导体的分界面上, 在恒定电流情况下, 导体内的电场线总是平行于导体表面的。
- 2.5 电流 I 均匀分布于半径为 a 的无穷长直导线内。导线的磁导率为 μ_0 , 试用安培环路定理求 \mathbf{B} , 并由此计算 \mathbf{B} 的散度和旋度。
- 2.6 已知静磁场矢势 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^2 y + \mathbf{e}_y y^2 z + \mathbf{e}_z 4xyz$, 求磁场 \mathbf{B} 。
- 2.7 一半径为 R_0 、磁导率为 μ 的介质球, 置于一均匀磁场 \mathbf{H}_0 中, 求磁标势 φ_m 与磁场 \mathbf{B} 。
- 2.8 设理想铁磁体的磁化规律为 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$, \mathbf{M}_0 是恒定的与 \mathbf{H} 无关的量, 今将理想铁磁体做成半径为 R_0 的均匀磁化球 (\mathbf{M}_0 为常量) 置于均匀外磁场 \mathbf{H}_0 中, 求磁场 \mathbf{B} 。
- 2.9 一半径为 a 的均匀带电球壳, 总电量为 Q , 绕某一直径以角速度 ω 转动, 求磁场能量。
- 2.10 如习题 2.10 图所示, 一磁矩为 \mathbf{m} 的小磁体, 放在磁导率为 μ 的很厚的铁板前, 与铁板相距为 a , \mathbf{m} 与 z 轴夹角为 θ , 求小磁体所受的力和力矩。



习题 2.10 图

第3章 电磁现象的普遍规律

前几章分别讨论了静电场和静磁场的基本性质及其规律，这些规律只能描述在一定条件下的电磁现象。

本章主要内容：从电磁现象的三大实验定律总结归纳出电磁现象的普遍规律。

讲授思路：先讨论电磁感应现象，然后全面地分析电磁现象的实验规律，将它们推广和修改以适用于非恒定情况，从而得到电磁运动的普遍规律——麦克斯韦 (J. C. Maxwell) 方程组。建立电动力学基本方程，讨论电磁场的能量和能流问题。作为麦克斯韦电磁场理论的应用实例，介绍超导体的电磁性质。

3.1 电磁感应定律

1831年，法拉第 (M. Faraday) 由实验发现，当磁场随时间变化时，附近闭合线圈中出现感应电流，并由此得出电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.1)$$

即闭合回路中的感应电动势 ε_i 与通过以回路为边界的任意曲面的磁通量变化率成正比。

根据电动势的定义，感应电动势就等于非静电电场强度 \mathbf{E}_i 沿回路的线积分

$$\varepsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.2)$$

此时法拉第电磁感应定律可写成

$$\oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.3)$$

式 (3.1.3) 中的非静电电场强度 \mathbf{E}_i 为感生电场，它是由变化的磁场激发的。

利用斯托克斯定理

$$\oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

由于积分面 S 是任意的，则有

$$\nabla \times \mathbf{E}_i = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.4)$$

空间磁感应强度 \mathbf{B} 随时间 t 的变化率的负值等于该点感生电场 \mathbf{E}_i 的旋度，这是法拉第电磁感应定律的微分形式。这个结果表明， $\nabla \times \mathbf{E}_i \neq 0$ ，即变化磁场所激发的感生电场是一种有旋场，也称为涡旋电场。

静电场和感生电场的性质完全不同，以 \mathbf{E}_s 表示静电场，对比如表 3-1 所示。

表 3-1 静电场与感生电场对比

静电场	感生电场
$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0$
$\nabla \times \mathbf{E}_s = 0$	$\nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

总电场 \mathbf{E} 等于静电场 \mathbf{E}_s 和感生电场 \mathbf{E}_i 之和。

即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i \quad (3.1.5)$$

而 $\nabla \times \mathbf{E}_s = 0$ ，则

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1.6)$$

当空间没有磁场或磁场不随时间变化时， $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，所以式 (3.1.6) 是普遍情况，电场既包含由电荷激发的静电场，又包含变化的磁场激发的感生电场。

3.2 麦克斯韦方程组

3.2.1 真空中的麦克斯韦方程组

总结电磁现象的基本实验规律有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (3.2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.1d)$$

这些方程都是在特殊情况下通过实验总结出来的，它们是否可以推广到随时间变化的一般情况呢？麦克斯韦在这些实验规律的基础上进行修改和推广，建立了麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组是电磁场的运动方程，是一个普遍的基本方程，它包含了恒定的和变化的电磁场两种情况。它在电动力学中的地位相当于牛顿定律在经典力学中的地位。只要知道了某个电磁场在初始时刻的状态和以后任何时刻的电荷、电流分布，就可以从麦克斯韦方程组求出任意时刻该电磁场的状态。

本节任务是建立麦克斯韦方程组，采用的方法是把电磁现象在静态情况下的方程推广到变化的电磁场，如果和实验不矛盾就保留，如果和实验矛盾就进行修改。先讨论真空的情况，再推广到介质中。

式 (3.2.1a) 是恒定电流激发磁场的方程，它能否推广到非恒定电流的情况呢？在回答这个问题之前，先分析一下非恒定电流的特点。

恒定电流是闭合的，满足 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ，在时变场的情况下，电流一般不再是闭合的。例如，

带有电容器的电路实质上是非闭合电路。在电容器两极板之间有绝缘介质，自由电子不能通过，就在板上堆积起来。在交流电路中，电容器交替地充电和放电，但在两极之间的介质中始终没有传导电流通过，电流在该处实际上是中断的。一般说来，在非恒定情况下

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial q}{\partial t} \neq 0$$

现在再看电流激发磁场的规律

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

对上式两边取散度

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$$

由矢量场论知道，上式左端总是等于零，而右端根据电荷守恒定律，只在恒定电流的情况下才等于零。在非恒定情况下， $\nabla \cdot \mathbf{j} \neq 0$ 。

因此若把方程(3.2.1a)推广到非恒定情况下，就会和电荷守恒定律发生矛盾。由于电荷守恒定律是精确的普遍规律，而方程(3.2.1a)仅是根据恒定情况下的实验规律导出的特殊规律，在两者发生矛盾的情况下，应该修改方程(3.2.1a)，使它符合电荷守恒定律的要求。可以设想：方程(3.2.1a)的右端除传导电流 \mathbf{j} 外，还有一项且它的散度不为零，则有可能解决它与电荷守恒定律之间的矛盾。不妨将还存在的那一项也称为某种“电流”，麦克斯韦称它为位移电流 \mathbf{j}_D ，并假设

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) = 0 \quad (3.2.2)$$

即 $\mathbf{j} + \mathbf{j}_D$ 是闭合的，传导电流线在什么地方中断，延续它们的位移电流线应该在什么地方接上。例如，电容器两极板之间就应该有位移动电流。假设位移电流与传导电流一样产生磁场

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) \quad (3.2.3)$$

此式两边的散度为零，因而理论上就不再有矛盾。下面求位移电流 \mathbf{j}_D 的表达式

由 $\nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{j}_D) = 0$ 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_D = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

而 $-\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ， $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ ，所以

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

麦克斯韦引入

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.2.4)$$

空间某一点位移电流密度与该点的电场强度随时间变化率成正比，因此，位移电流实质上是电场的变化率，只要 $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq 0$ ，位移电流就存在。则式(3.2.1a)推广到非恒定情况

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.2.5)$$

式 (3.2.5) 表示变化的电场与传导电流一样激发涡旋磁场, 当电场不随时间变化时, $\mathbf{j}_D = 0$, 式 (3.2.5) 就退回到静磁场的情况, 即式 (3.2.1a)。

关于位移电流要注意以下两点。

(1) \mathbf{j} 、 \mathbf{j}_D 都称为电流密度, 但它们实质上是两个完全不同的物理概念。传导电流和电荷运动相对应, 而真空中的位移电流只与电场强度随时间的变化有关, 并不伴随电荷或任何物质质点的运动, 它们唯一共同的性质是以相同的方式激发磁场。

(2) 位移电流密度这个概念, 不是直接起源于实验, 而是由理论内部出现矛盾以假设的形式提出的, 电磁波的存在完全证实了位移电流的正确性。

式 (3.2.1b) 是静电场方程 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 的推广, 这个推广已包含了随时间变化的磁场激发涡旋电场。

式 (3.2.1c) 可否推广到一般情况?

已知电场有两个来源, 一个是电荷产生的, 它满足 $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, 是有源场。另一个是变化磁场产生的, 满足 $\nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 是有旋场。涡旋电场的电场线是闭合的, $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0$, 则非恒定情况下, 保持 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 形式不变, \mathbf{E} 是总电场。

式 (3.2.1d) 是从恒定电流的磁场得到的, 能否推广到一般情况?

对式 (3.2.1b) 两边取散度

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

上式说明 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 不随时间变化, 从数学表达式上可以这样理解, $\nabla \cdot \mathbf{B} = \text{常数}$, 可以选 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 如果在初始条件选 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 那么以后就永远不会产生磁荷。

磁场有两个来源, 一个是电流产生, 一个是变化的电场产生的, 两者产生的磁场都有旋场, 磁场线是闭合的, 也即无源场。故在随时间变化的电磁场情况下无磁荷, 仍有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

至此, 已经把电磁学中最基本的实验定律式 (3.2.1) 经过总结, 推广到一组在一般情况下互相协调的方程组

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.2.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2.6b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2.6c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.6d)$$

称为真空中的麦克斯韦方程组, 它反映了一般情况下电荷、电流激发电磁场的规律, 以及电场和磁场之间的相互关系。不仅电荷可以激发电场, 变化的磁场也可以激发电场。不仅传导

电流可以激发磁场，位移电流即变化的电场也可以激发磁场。在 ρ 、 \mathbf{j} 为零的区域，电磁场由于电场和磁场之间的联系，互相激发而存在和运动着。

麦克斯韦方程组最重要的特征是它揭示了电磁场的内在矛盾和运动。变化的磁场和电场可以互相激发，因而只要某处发生电磁扰动，由于电磁场互相激发，它就在空间运动传播，形成电磁波。麦克斯韦首先根据这组方程在理论上预言了电磁波的存在，并指出光波就是一种电磁波。以后的赫兹实验和近代无线电的广泛实践完全证实了麦克斯韦方程组的正确性。麦克斯韦方程组不仅揭示了电磁场的运动规律，更揭示了电磁场可以独立于电荷、电流以外而单独存在，指出了电磁场的物质性。关于电磁场的物质性和波动性还将在后面讨论。

3.2.2 介质中的麦克斯韦方程组

关于电介质与磁介质的下列关系式对变化电磁场依然成立。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

利用这些关系式可由真空中的麦克斯韦方程组得到介质中的麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.2.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (3.2.7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.7d)$$

与真空中麦克斯韦方程组比较，式 (3.2.7b)、式 (3.2.7d) 与式 (3.2.6b)、式 (3.2.6d) 完全一样，所以无须证明。因为式 (3.2.7b)、式 (3.2.7d) 本来就是电磁场内部的规律。两式中只出现总电场和总磁场，与电荷、电流没有直接关系，因此在介质中仍然成立，即式 (3.2.7b) 说明磁场的变化激发电场，式 (3.2.7d) 说明磁场 \mathbf{B} 是无源场，这些规律在任何介质中均相同。

此外，式 (3.2.7c) 是由静电场推广到变化电磁场的。此时也不必重新证明。

式 (3.2.7a) 需要证明。

在介质存在时，电磁场对介质中的带电粒子发生作用，引起介质的极化和磁化。由于电磁场随时间变化，引起了介质极化和磁化状态的改变。除了极化电荷 ρ_p 和磁化电流密度 \mathbf{j}_M 随时间变化外，极化强度矢量 \mathbf{P} 的改变还引起极化电流密度 \mathbf{j}_p 。

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}, \quad \mathbf{p}_i = q_i \mathbf{r}_i$$

\mathbf{p}_i 是第 i 个分子的电偶极矩，每个带电粒子的位置为 \mathbf{r}_i ，电荷量为 q_i

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\sum q_i \mathbf{v}_i}{\Delta V} = \mathbf{j}_p \quad (3.2.8)$$

式中， \mathbf{v}_i 是第 i 个分子的速度， \mathbf{j}_p 称为极化电流密度。

介质的磁现象也包含两个方面：一方面电磁场作用于介质分子上产生磁化电流、极化电流分布；另一方面这些电流又反过来激发磁场。所以，式（3.2.7a）在介质中应为

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_D \quad (3.2.9)$$

式中， $\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ ， $\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ ， $\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ，代入式（3.2.9）可得到

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

由于 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ ， $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，则有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.2.10)$$

此处， $\mathbf{j}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 称为介质中的位移电流密度，它包含两部分

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (3.2.11)$$

即真空中的位移电流密度和介质中的极化电流密度。

3.2.3 介质的电磁性质方程与边值关系

1. 介质的电磁性质方程

对于各向同性的线性介质

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

在导电介质中还有

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

这些关系式称为介质的电磁性质方程，它们反映介质的宏观电磁性质。要注意介质的电磁性质方程的适用范围，在下列情况中不适用：

- （1）高频情况下， ε 、 μ 都是场变化频率 ω 的函数；
- （2）铁电、铁磁介质或强场情况下， \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 、 \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 的线性关系不成立；
- （3）各向异性介质 ε 、 μ 都是张量。

2. 电磁场的边值关系

由麦克斯韦方程组积分形式的 4 个方程

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q_f \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

可以得到电磁场的边值关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha}_f \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_f \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

可以看出, 电磁场的边值关系与静电场和静磁场的边值关系完全相同。这是因为, 证明静电场和静磁场的边值关系时

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

可得到式 (3.2.13) 表示的边值关系。

而证明电磁场的边值关系时, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 是有限的。但是在证明切向分量的跃变时, 取的小狭长回路 $h \rightarrow 0$, 回路所包围的面积趋于零, 则有

$$\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0, \quad \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$$

因此, 边值关系形式不变。

3.2.4 洛伦兹力公式

自然界的事物都是相互联系、相互制约的, 电磁场与带电粒子之间有着密切的联系。麦克斯韦方程组反映的仅是电荷、电流激发场及场内部运动的一般规律, 而电磁场对电荷体系的作用在麦克斯韦方程组中并没有表现出来。库仑定律与安培定律反映了静电场和静磁场对电荷体系的作用。

静止电荷 Q 受到的静电场作用力为

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad (3.2.14)$$

若电荷连续分布, 电荷体密度为 ρ , 受到静电场作用力密度为

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} \quad (3.2.15)$$

恒定电流元 $\mathbf{j}dV$ 受到磁场的作用力为

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}dV \quad (3.2.16)$$

电流密度 $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ 受到静磁场作用力密度为

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.17)$$

洛伦兹 (H. A. Lorentz) 将以上公式推广到带电体在变化的电磁场中运动的情况。当电荷体密度为 ρ , 带电体以速度 \mathbf{v} 在电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 中运动时, 所受到的力密度为

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.2.18)$$

对一个带电粒子, 受电磁场的作用力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.19)$$

式 (3.2.19) 称为洛伦兹力公式。

近代物理实验证实了洛伦兹力公式对任意运动速度的带电粒子都是适用的。现代粒子加速器、电子光学设备等都以麦克斯韦方程组和洛伦兹力作为设计的理论基础。

此外，电荷本身的运动遵守电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.2.20}$$

描述电磁场运动的麦克斯韦方程组，决定电磁场对电荷作用的洛伦兹力，电荷运动所遵守的电荷守恒定律，这三方面在一起组成电动力学的基本方程式，如表 3-2 所示。

表 3-2 电动力学基本方程式

麦克斯韦方程组	$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$
洛伦兹力	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
电荷守恒定律	$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

3.3 电磁场的能量和能流

能量问题在一切物理现象中都是至关重要的，对于电磁现象也不例外。在生产实践中，如何利用电磁能发光、发热、做功？如何把热能、机械能、原子能等转换成电磁能？要解决这些问题，首先必须搞清楚电磁能量以何种形式存在，以何种形式传递。

在历史发展的过程中，人们对于一种新的能量的认识，总是通过它与已知的能量之间相互转化，再由总能量守恒的关系得出的。因此，求电磁场的能量也是通过电磁场与带电体相互作用时能量转化和守恒关系来进行的。讨论电磁场能量问题，是以功与能的关系、能量守恒定律和代表电磁现象的普遍规律的麦克斯韦方程组及洛伦兹力公式为依据的。

现在来研究真空中运动带电体系受电磁场的作用，而引起的总机械能量的变化。

设有一带电体，其电荷体密度为 ρ ，以速度 \mathbf{v} 在电磁场中运动，在 dt 时间内，体积元 dV 中电荷 ρdV 发生的位移为 $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ ，则电磁场对电荷 ρdV 所做的功为

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \rho dV (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt dV \tag{3.3.1}$$

式中 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ ，磁场对运动电荷不做功。这是因为磁场对运动电荷的力总与运动方向垂直。

又由于 $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ ，在 dt 时间内，电磁场对整个空间中运动带电体所做的功为

$$dW = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV dt \tag{3.3.2}$$

单位时间所做的功为

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV \tag{3.3.3}$$

为了寻求带电体的机械能和电磁场能量的关系, 必须将式 (3.3.3) 中的 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ 用麦克斯韦方程组替换, 或者说, 把 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ 用麦克斯韦方程中的场量表示出来。

由麦克斯韦方程中 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 可写出

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.3.4)$$

则

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.3.5)$$

由于 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (3.3.6)$$

定义

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3.8)$$

则

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (3.3.9)$$

将式 (3.3.9) 代入式 (3.3.3), 此时, 单位时间电磁场对整个空间内运动带电体 (或传导电流) 所做的功为

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(-\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S} \right) dV$$

式中, 右边第一项因为积分体积与时间 t 无关, 故可将 $\frac{\partial}{\partial t}$ 提到积分号外。第二项利用高斯散度定理, 为了避免混淆, 把体积 V 所包围的面积用 σ 表示 $\oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV$, 则有

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V w dV - \oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma \quad (3.3.10)$$

现在讨论式 (3.3.10) 的物理意义, 分两种情况讨论。

(1) 积分区域为整个空间。此时积分区域的包面在无穷远处, 由于电荷、电流都集中在有限区域内, 所以在无穷远处电磁场皆为零, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 也等于零。式 (3.3.10) 可以写成

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} w dV \quad (3.3.11)$$

式 (3.3.11) 左端表示单位时间内电磁场对带电体所做的功, 或者说单位时间内带电体总机械能的增加。电磁场既然做了功, 它的能量必会相应地减少。式 (3.3.11) 右端应表示整个空间电磁场能量的减少。 $\int_{\infty} w dV$ 应为电磁场的总能量, w 则是电磁场的能量密度。因此, 式 (3.3.11) 表示无限空间带电体系和电磁场的能量守恒和转化定律。

由以上讨论知, w 是电磁场的能量密度, 式 (3.3.8) 应是电磁场能量密度随时间的变化率, 由式 (3.3.8), 利用 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, ϵ 、 μ 不随时间变化, 可得到电磁场的能量密度为

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.3.12)$$

式 (3.3.12) 表示电磁场的能量密度分为两部分: 一部分是电场能量密度, 一部分是磁场能量密度。由此知道, 电磁场本身就具有能量, 这里“场能量”的概念是十分重要的, 能量定域于空间, 有电磁场的地方就有能量, 这对于认识电磁场的物质性是很关键的。电磁场是客观存在的, 存在于空间各点, 能随时间变化、运动, 具有一定的能量, 可以和其他物质交换能量, 所以电磁场是一种物质。

静电场和静磁场的能量是式 (3.3.12) 的特例。

在静电场中不存在磁场, 电场的能量密度为 $w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$;

在静磁场中不存在电场, 磁场的能量密度为 $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ 。

(2) 积分区域为有限空间, 此时积分区域的包面 σ 不在无穷远处, 则包面 σ 上电场与磁场不为零, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 也不为零, 将式 (3.3.10) 写成

$$\frac{dW}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V w dV = - \oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.3.13)$$

式 (3.3.13) 左端表示体积 V 中带电体和电磁场能量的增加率, 这些能量从何而来呢? 根据能量守恒定律, 它们只能从体积外通过 V 的包面 σ 流进来。因此右端 $-\oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 的物理意义必然是单位时间通过闭合曲面流进体积 V 中的电磁能量, 如图 3-1 所示。

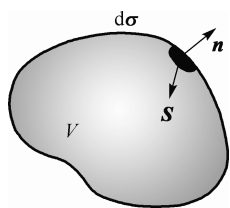


图 3-1 能流密度示意图

当 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} < 0$ 时, 则 $-\mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} > 0$, 表示流进;

当 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} > 0$ 时, 则 $-\mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0$, 表示流出。

而 $\oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 则表示单位时间向外流出的电磁能量。

这样矢量 \mathbf{S} 应该表示单位时间内通过与 \mathbf{S} 方向垂直的单位面积的电磁场的能量, 即流过场中某点的垂直于 \mathbf{S} 方向的单位面积的电磁能, 称为电磁场的能流密度, 亦称为坡印亭 (Poynting) 矢量。

方向由该处的 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的方向确定, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 满足右手螺旋法则。

换句话说, \mathbf{S} 在数值上等于单位时间垂直流过单位横截面的电磁能量, 其方向代表能量传输方向, 它描述电磁能量在场内的传播, 称为电磁场的能流密度。

因此, 式 (3.3.10) 为有限区域内能量守恒和转化定律在电磁现象中的表现形式。其中 $\int_V w dV = W_{\text{em}}$ 为电磁场的总能量。

可将有限区域内电磁场的能量守恒和转化定律写成

$$-\frac{dW_{\text{em}}}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.3.14)$$

相应的微分形式为

$$-\frac{dw}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (3.3.15)$$

再讨论式(3.3.14)的物理意义:

(1) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ 代表单位时间单位体积内电流所做的功, 如果 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, 则 $\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV$ 为焦耳热, 此项代表了电磁场中电流所消耗的能量。

(2) $-\frac{dW_{\text{em}}}{dt}$ 代表体积 V 内电磁场所具有的总能量随时间的减少, 式(3.3.14)表明这部分能量一部分变成电流的焦耳热, 另一部分则以矢量的形式穿过体积的包面向外流出。

(3) 如果 $\mathbf{j} = 0$, 没有传导电流的非导体。可得到

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (3.3.16)$$

式(3.3.16)与电流连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 类似, w 是电磁场的能量密度, \mathbf{S} 描述了能量的流动, 称为能流密度。

【例 3-1】 半径为 R , 电导率为 σ 的无穷长直圆柱导线, 轴向通以均匀的恒定电流 I , 导线表面上有均匀的电荷分布, 电荷面密度为 $+\sigma_f$ 。

(1) 求导线表面外侧的能流密度 \mathbf{S}_2 ;

(2) 求导线内的能流密度 \mathbf{S}_1 ;

(3) 证明由导线表面进入导线内的电磁能量刚好等于导线焦耳热损耗。

解: (1) 电磁场能流密度 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 求某一点的 \mathbf{S} , 须先求出该点的 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。

选用柱坐标系, z 轴沿导线轴线, 电流 $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z$ 。由对称性可知, 电场没有 ϕ 分量。

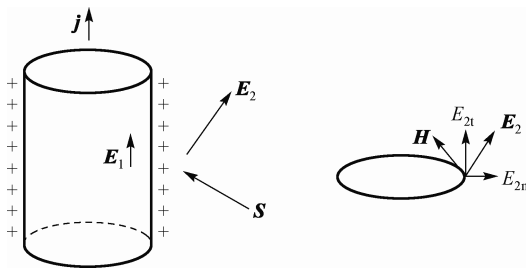


图 3-2 例 3-1 图

利用欧姆定律可求得导线内的电场

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma\pi R^2} \mathbf{e}_z$$

由导线表面的边值关系 $E_{2t} = E_{1t}$, 可求出导线表面外侧电场 z 分量

$$E_{2z} = \frac{I}{\sigma\pi R^2}$$

导线表面电荷分布激发的电场可由高斯定理求出

$$E_{2r} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}$$

导线表面外侧的电场应为 $\mathbf{E}_2 = E_{2r}\mathbf{e}_r + E_{2z}\mathbf{e}_z$ ，是由恒定电流 \mathbf{j} 与导线表面的电荷 σ_f 共同激发的。由安培环路定律可求得导线表面外侧的磁场

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi R}\mathbf{e}_\phi$$

导线表面外侧的能流密度为

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_2 &= \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 = (E_{2r}\mathbf{e}_r + E_{2z}\mathbf{e}_z) \times \mathbf{H}_2 \\ &= E_{2r}H_2(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi) + E_{2z}H_2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\phi) \\ &= E_{2r}H_2\mathbf{e}_z - E_{2z}H_2\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

将 E_{2r} 、 E_{2z} 、 H_2 的表达式代入可得到

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{I^2}{2\sigma\pi^2 R^3}\mathbf{e}_r + \frac{I\sigma_f}{2\pi\epsilon_0 R}\mathbf{e}_z \quad (3.3.17)$$

(2) 导线内离轴线 r 处的磁场为

$$\mathbf{H}_1 = \frac{Ir}{2\pi R^2}\mathbf{e}_\phi$$

导线内的能流密度为

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 = \frac{I}{\sigma\pi R^2}\mathbf{e}_z \times \frac{Ir}{2\pi R^2}\mathbf{e}_\phi = -\frac{I^2 r}{2\pi^2 \sigma R^4}\mathbf{e}_r \quad (3.3.18)$$

(3) 导线外侧能流密度 \mathbf{S}_2 的 \mathbf{e}_r 分量将进入导线内，则单位时间内进入长度为 L 的一段导线内的电磁能量

$$-\oint_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 R^3} 2\pi RL = \frac{I^2}{\sigma\pi R^2} L$$

这一段导线内的传导电流 $\mathbf{j} = \frac{I}{\pi R^2}\mathbf{e}_z$ 在单位时间内引起的焦耳热损耗为

$$\int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}_1 dV = \frac{I}{\pi R^2} \frac{I}{\sigma\pi R^2} \pi R^2 L = \frac{I^2}{\sigma\pi R^2} L$$

由此可见，进入导线内的电磁能量刚好等于导线的焦耳热损耗。

结果讨论：

(1) 由式 (3.3.17) 可知，在导线外部，能量既通过轴向分量沿导线方向向前传输，又通过径向分量向导体内部传输。导体外面的能流密度矢量 \mathbf{S}_2 大致与导体平行，这表示能量大致顺着导体的方向流动，导体的作用就是引导电磁能量到指定的方向。但是由于导体有电阻，所以本身还要消耗能量，因而外面的 \mathbf{S}_2 还需稍微倾斜，使部分能量流入导体以补偿损耗。只有在理想导体周围， \mathbf{S}_2 才完全与导体表面平行，这时导体不消耗能量。

(2) 由式 (3.3.18) 可知，从导线外部经其表面流入内部的能量没有沿导线方向的流动，

仅有沿导线横截面从表面向轴心的流动,并且越深入,导体 S_l 的数值越小。当 $r=0$ 时, $S_l=0$,表示能量逐渐损失,以不断地补偿导体中的焦耳热损耗。这就说明,电磁能量并不是在导线内部由电流传递的,而是在导线附近的电磁场中沿导线方向传输的。并且导线中的焦耳热损耗也是直接由其附近的电磁场能量流入导体而转化的。在这里,导线不仅起着引导电流的作用,还起着引导电磁信号传输的作用。

(3) 图3-3所示为这个载流导体的纵截面图,画出了导体内部和外部的电磁场及能流密度分布。

这样一个能量传输的图像和我们日常的想法是完全不同的。通常人们认为用电线往远处输送的电能是由电流传递的,通过上面的分析可知,事实并非如此。电能是沿导线附近的电磁场流过去的,导线中的焦耳热也是直接由附近的场能流入导体而转化的。

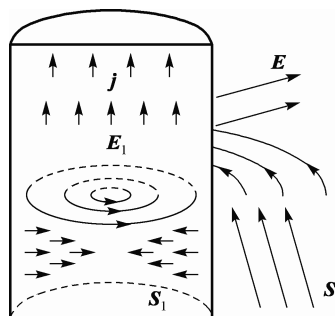


图3-3 载流导体的纵截面图

3.4 超导体的电磁性质

3.4.1 超导体的电磁性质

1911年,荷兰物理学家卡末林·昂内斯(H. Kamerling-Onnes)在液氢温度下研究金属的电阻与温度的关系时,发现在温度 $T=4.2\text{ K}$ 时,汞样品的电阻突然下降到零,如图3-4所示。

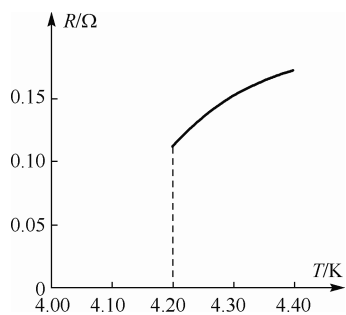


图3-4 金属汞的电阻与温度的关系

1913年在昂内斯发表的论文中首次提出超导电性这个名词,即认为汞在 4.2 K 附近进入了一个新的物态——超导电态。通常把具有超导电性的物质称为超导体。把电阻突然降为零的温度称为超导转变温度或临界温度,用 T_c 表示。

自1911年发现超导现象以来,很多科学家都致力于寻找新的超导体和提高超导临界温度。经过70多年的努力,直到1986年初,才把金属及合金材料的临界温度从 4.2 K 提高到 23.2 K 。1986年4月,美国IBM公司设在瑞士苏黎世实验室的缪勒(K. A. Müller)博士和柏诺兹(J. G. Bednrrz)博士发现镧钡铜氧(La-Ba-Cu-O)化合物在 30 K 出现超导现象,成为人们研究氧化物超导体的一個新起点。1987年对于物理学界是很不寻常的一年,全世界展开了超导竞赛,柏诺兹和缪勒因发现高临界温度超导体而荣获1987年诺贝尔物理学奖,因此称1987年为“超导年”。目前寻找更高临界温度超导材料仍然是材料学科与物理学科的研究热点,据文献报道,高临界温度超导材料已可实现起始转变温度为 200 K 的超导体。

下面介绍超导体的基本电磁性质。

1. 零电阻现象

在某一温度下,某些金属、合金和化合物的电阻突然降为零,这就是零电阻现象或超导电现象。

用电磁感应方法可以在超导环上感应持久电流,它可以维持几年仍观测不到衰减,因此

持久电流实验是证明超导体电阻为零的主要依据。

大家知道,若将一金属环放在变化着的磁场中,则环内就会产生感应电动势。如果以 L 表示环的自感, R 表示其电阻,则有

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0 \quad (3.4.1)$$

积分后得

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} \quad (3.4.2)$$

式中, $\tau = \frac{L}{R}$, 表示衰减时间, 对于正常金属来说, τ 很小, 环内电流很快衰减为零。然而对于超导体, 情况完全不同。先把超导体置于磁场中, 然后使它冷却变为超导态, 再将磁场撤掉, 这时在超导环中出现感应电流。实验发现此电流衰减极小, 有人曾使一超导环中的电流保持两年半之久, 没有发现电流有明显的变化。

2. 临界磁场与临界电流

与超导现象关系最密切的是温度, 不达到超导临界温度以下, 就不会发生超导现象, 然而制约超导现象的因素不仅仅是温度, 即使在低于临界温度下, 若进入超导体的电流及周围磁场的强度超过某一临界值, 就会破坏超导状态, 而成为普通的常电导状态, 该极限值称为临界电流及临界磁场。

实验表明, 在低于样品 T_c 的任一确定温度下, 当外加磁场的磁感应强度 B 小于某一确定值 B_c 时, 超导体具有零电阻特性。当 B 大于 B_c 时, 电阻突然出现, 超导态被破坏而转变为正常态, 通常称 B_c 为超导体的临界磁场, 它是温度的函数。临界磁场是标志超导体性质的重要物理量, 研究表明, 各种不同超导体的临界磁场 B_c 与温度 T 的关系都可近似地用下列公式表示

$$B_c(T) = B_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (3.4.3)$$

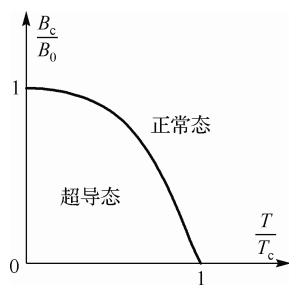


图 3-5 临界磁场与温度的关系

式中, B_0 是 $T = 0 \text{ K}$ 时超导体的临界磁场, T_c 是无磁场存在时的临界温度。式 (3.4.3) 表示, 当 $T = T_c$ 时, $B_c = 0$; 当 $T = 0 \text{ K}$ 时, $B_c = B_0$, 达到最大值。实际上 $B_c(T)$ 曲线把 B - T 平面分为两个区域, 如图 3-5 所示, 曲线的右上方为正常态, 左下方为超导态, 从超导态到正常态的变化可以通过改变温度来实现, 也可通过改变磁场来实现。

当通过超导线的电流超过一定数值 I_c 后, 超导态便被破坏, I_c 称为超导体的临界电流, 相应的电流密度称为临界电流密度 j_c 。临界电流与温度的关系

$$I_c(T) = I_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (3.4.4)$$

式中, I_0 表示 $T = 0 \text{ K}$ 时的临界电流。

超导体有临界温度、临界磁场、临界电流。当超过一定温度时，超导现象就会消失。同时当磁场和电流超过一定值时，超导现象也会消失，上述三个因素具有相互关联性。当温度、磁场、电流三个条件都满足临界条件时，才会出现超导现象。

3. 迈斯纳效应

1933年，迈斯纳（W. Meissner）和奥克森菲尔德（R. Ochsenfeld）将锡和铅样品放在磁场中冷却到临界温度 T_c 以下，观察样品外的磁通分布。他们发现，从正常态变到超导态后，原来穿过样品的磁通量被完全排斥到样品外，同时样品外的磁通密度增加，如图 3-6 所示。对实验结果的定量分析表明：不论是先降温后加磁场，还是先加磁场后降温，不管过渡到超导态的途径如何，只要 $T < T_c$ ，超导体内部总有 $B = 0$ 。当施加一外磁场时，在超导体内不出现净磁通密度的特性称为完全抗磁性，也称为迈斯纳效应。

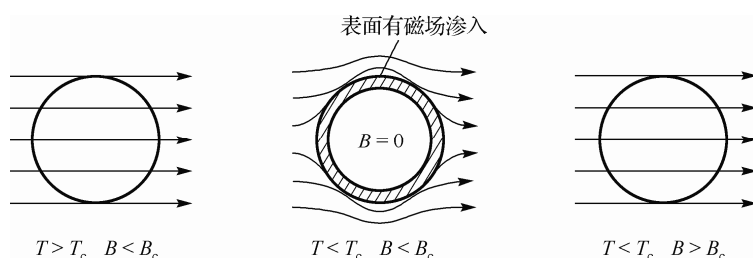


图 3-6 迈斯纳效应

悬浮磁体实验是表示超导体完全抗磁性的一个有趣实验。当一个小的永久磁体降落到一个超导体表面附近时，由于永久磁体的磁场线不能进入超导体，在永久磁体与超导体之间存在的斥力可以克服小磁体所受的重力，使小磁体悬浮在超导体表面一定的高度上。同理，一个超导球也可以用一个流着持续电流的超导环使它悬浮起来，用这个原理可以制成超导重力仪，用来测量地球重力的变化。还有超导磁悬浮列车等。

需要指出，在迈斯纳效应中，在超导体表面薄层内，磁场并不完全为零，因而还有一些磁通穿过表面层，这个表面薄层的厚度约为 10^{-7}m 。

4. 第Ⅱ类超导体

前面讲过临界磁场的概念。第Ⅰ类超导体具有一个临界磁场 B_c ，当外磁场小于临界磁场 B_c 时，超导体内部 $B = 0$ ，当外磁场大于临界磁场时，超导电性突然消失，超导体进入正常态。导体内部的磁感应强度不再是零，出现了正常金属所应有的磁感应通量。这类超导体称为第Ⅰ类超导体，一般第Ⅰ类超导体的临界温度和临界磁场都很低，所以实用意义很有限。

另一类超导体的性质与此不同，称为第Ⅱ类超导体，第Ⅱ类超导体具有两个临界磁场。当外磁场小于 B_{c1} （称为下临界磁场）时，超导体内 $B = 0$ ，称为迈斯纳态。当外磁场超过下临界磁场 B_{c1} 时，有部分磁通量穿入超导体内，超导体内的磁感应强度从零逐渐增大，直到外磁场 $B = B_{c2}$ （上临界磁场）时，超导电性消失，这类超导体称为第Ⅱ类超导体。第Ⅱ类超导体两个临界磁场与温度的关系如图 3-7 所示。

第Ⅱ类超导体的主要特点是具有下临界磁场 B_{c1} 和上临界磁场 B_{c2} 。当外磁场处于 B_{c1} 和 B_{c2} 之间时，超导体的状态不是迈斯纳态，也不是正常态，称之为混合态。在混合态下，超导体内磁感应强度 $B \neq 0$ ，电阻率 $\rho \rightarrow 0$ 。只有当外磁场超过上临界磁场 B_{c2} 时，零电阻现象才

消失。大多数合金和超导化合物及铌、锝、钒都属于第Ⅱ类超导体，第Ⅱ类超导体材料上临界温度一般都很高，比第Ⅰ类超导体高几百倍以上，有很重要的实用价值。

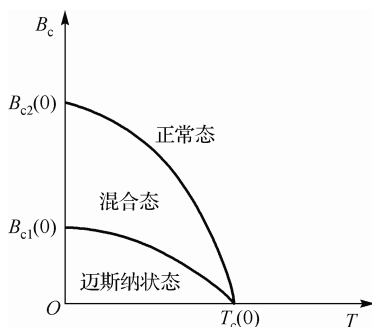


图 3-7 第Ⅱ类超导体临界磁场与温度的关系

3.4.2 二流体模型

超导体为什么与正常导体不一样，为什么电流会不受阻碍地在其中流动呢？为了解释这些问题，荷兰物理学家戈特（C. J. Gorter）和西米尔（H. Casimir）提出了一种模型，它们被称为“二流体模型”。

在超导体中存在有两种电子，它们彼此独立地运动。一种是正常的电子，另一种是超导电子，这两种电子就像两种流体一样在超导体中流动。在常态时，超导体中只有正常电子，它的行为就和正常导体一样，存在电阻，当温度降低到临界温度以下时，超导体进入超导态，这时超导体中就出现了超导电子，它们可以不受任何阻碍地在超导体中流动，温度越低，超导电子就越多，当温度无限地接近于绝对零度时，超导体中就只有超导电子存在了。

按照二流体模型的观点，在超导体中，持久电流是超导电子承担的。有人会提出这样的问题： $T < T_c$ 时，还有一部分正常的自由电子，它们应使金属表现为一定的电阻。超导体中，电场强度必为零，否则，电子就要不断地加速，而使电流随时间无限增加了。实际上，由超导电子担负起来的恒定电流是不需要电场力推动的。另一方面，正常电子的定向流动是要受到阻力的，而在超导体内部电场为零，没有电场力推动电子，正常电子就不产生电流。

德国物理学家 F·伦敦（F. London）和 H·伦敦（H. London）兄弟二人，1933 年根据发现的迈斯纳效应，开始研究超导体的电动力学理论。H·伦敦独立于戈特和西米尔，也提出了类似的二流体模型。1935 年，伦敦兄弟提出了适用于超导电子的两个新的方程，把这两个方程和麦克斯韦方程组结合起来说明了超导体的电磁性质，也解释了迈斯纳效应，这两个方程被称为伦敦方程。伦敦的超导电动力学不仅说明了超导体已知的许多电磁性质，而且可以推理出一个新的预言。他们根据这一理论提出：在超导态处于外磁场中的超导体内并不是完全没有磁场，实际上外磁场是可以穿到超导体表面附近很薄的一层中，这一点以前人们是没有想到的，由于外磁场穿透的厚度只有十万分之一厘米左右，所以观察是非常困难的，直到 4 年以后，才有实验结果证明确实存在这样的现象，由于这一预言的成功，伦敦理论得到了更有利的支持。

3.4.3 伦敦方程

电磁系统的基本规律是麦克斯韦方程组，不管体系是何种性质的介质，是各向同性的还

是各向异性的, 是磁介质还是电介质, 是导电介质还是绝缘介质, 它们的宏观电磁现象都由这个方程组描述。唯一要注意的是, 介质的不同意味着描述电磁性质的方程不同, 例如, 电介质 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, 磁介质 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 导体 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ 等, 因此从麦克斯韦理论的意义上来说, 超导体不过是一种具有奇特电磁性质的介质。物理学家的任务就是要找到描述这一特殊介质特有的电磁性质方程。

超导体的二流体模型是把超导体视为普遍的导体, 所以 $\mu \approx \mu_0$, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, 超导体中存在着两种电流: 一种是没有配对的正常电子流动产生的电流 \mathbf{j}_n ; 另一种是配成库珀对的超导电子流动产生的电流 \mathbf{j}_s 。

总电流密度为

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s$$

超导体满足的方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3.4.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.4.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.4.5c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.4.5d)$$

电流的连续性方程为

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4.6)$$

正常电子运动时和晶格发生碰撞而表现为正常电阻, 故

$$\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$$

然而超导电子是被晶格“组织”起来的集体, 它们有序地运动, 因而不体现电阻性, 欧姆定律不成立, 因此着重讨论超导电流 \mathbf{j}_s 与场矢量之间的关系。

1. 伦敦第一方程

大家知道, 在有电阻的导体中, 电场的作用是维持电流。在无电阻的超导体中, 电场使超导电子做加速运动, 所以超导电流 \mathbf{j}_s 与电场的关系可从超导电子的运动方程中导出, 即

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (3.4.7)$$

式中, m 为电子质量, e 为电子电荷量, \mathbf{v} 为电子速度。

若单位体积中有 n_s 个超导电子, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_s &= -n_s e \mathbf{v} \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{n_s e} \mathbf{j}_s \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

将式 (3.4.8) 代入式 (3.4.7) 可以得到

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \quad (3.4.9)$$

式 (3.4.9) 称为伦敦第一方程, 反映了超导体的零电阻特性。

将式 (3.4.9) 改写成

$$\mathbf{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} \quad (3.4.10)$$

很容易看出, 若超导电流是恒定的, $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_s = 0$, 则 $\mathbf{E} = 0$ 。由 $\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{j}_n = 0$ 。此时的超导体内只有无损耗的超导电流, 即零电阻现象。若超导电流是交变的, $\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} \neq 0$, 则 \mathbf{j}_n 也不为零, 这时超导体出现了交流损耗。

2. 伦敦第二方程

为了解释迈斯纳效应, 把伦敦第一方程式 (3.4.10) 代入超导体情况下麦克斯韦方程式 (3.4.5b) 可得

$$\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} \mathbf{j}_s \right) + \mathbf{B} \right] = 0 \quad (3.4.11)$$

$$\text{因此} \quad \nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} \mathbf{j}_s \right) + \mathbf{B} = \text{常矢量}$$

假定常矢量为零, 则有

$$\nabla \times \left(\frac{m}{n_s e^2} \mathbf{j}_s \right) = -\mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \quad (3.4.12)$$

这是伦敦第二方程, 反映了超导电流和磁场的关系。

伦敦第一、第二方程建立了超导电流和电场、磁场之间的联系, 在这一点上与普通导体中的欧姆定律 $\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$ 对应。需要强调的是, 普通导体中的电流由电场来维持, 但超导体则完全不同, 超导电流是靠磁场来维持的, 电场只起加速超导电流的作用。

伦敦第二方程解释了迈斯纳效应, 这可从下面的计算看出。

由超导体情况下麦克斯韦方程组式 (3.4.5d), 当 \mathbf{j}_s 恒定时, $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{j}_n = 0$, 可有

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s \quad (3.4.13)$$

两边取旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}_s \quad (3.4.14)$$

式 (3.4.14) 左端 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 所以有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

对式 (3.4.14) 右端利用伦敦第二方程 $\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B}$, 则有

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \mathbf{B} = 0 \quad (3.4.15)$$

令 $\alpha^2 = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}$, 则

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \alpha^2 \mathbf{B} = 0 \quad (3.4.16)$$

假设超导体占据 $z > 0$ 的空间, 如图 3-8 所示, 且 $\mathbf{B} = B(z)\mathbf{e}_x$, 则式 (3.4.16) 变为

$$\frac{d^2 B}{dz^2} - \alpha^2 B = 0 \quad (3.4.17)$$

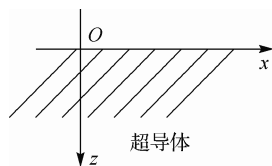


图 3-8 超导体在 $z > 0$ 的空间示意图

这个微分方程解的形式为

$$\mathbf{B} = B_0 e^{-\alpha z} \mathbf{e}_x \quad (3.4.18)$$

可见, 磁场随着 z 的增大而指数衰减, 或者说磁场不能进入超导体内部, 只能透入超导体表面薄层, 其透入深度为

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.19)$$

其数量级约为 10^{-7} m 。

由以上讨论可知, 超导体内磁场只在极薄的表面层中存在, 内部没有磁场, 这与迈斯纳效应是相符的。

伦敦方程是唯象的超导体介质状态方程, 它可以解释超导体的零电阻特性与迈斯纳效应, 但是它仅仅反映了超导体的客观电磁性质, 并没有从微观上对这些性质做出解释, 从微观上做出解释的是 BCS 理论, 将在量子力学中介绍。BCS 理论是布丁 (J. Bardeen)、库伯 (L. N. Cooper) 和施里弗 (J. R. Schrieffer) 共同创立的解释常规超导体的超导电性的微观理论。

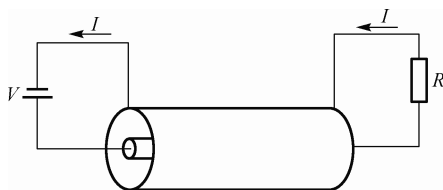
习 题

3.1 在半径为 a , 间隔为 d 的圆形平行板上加以交流变电压 $V = V_0 \cos \omega t$ 。

试求:

- (1) 两平行板间的位移电流;
- (2) 平行板电容器内离轴为 r 处的磁场强度;
- (3) 电容器内的能流密度;
- (4) 能流密度的平均值。

3.2 端电压为 V 的电源, 通过一同轴电缆向负载电阻 R 供电, 如习题 3.2 图所示: 同轴电缆由一根长直金属直线和套在它外面的同轴金属圆筒构成。设边缘效应及电缆本身所消耗的能量均可略去不计, 试证明: 电缆内导线与圆筒间的电磁场向负载 R 传输的功率等于负载 R 消耗的功率。



习题 3.2 图

- 3.3 有一根长直同轴线，它的内导体半径为 a ，外导体的内半径为 b ，两导体之间充以电容率为 ϵ 的电介质。同轴线上输送的是恒定电流 I ，在同轴线某处横截面上，内、外导体之间的电压为 V 。试求：
- (1) 不计导体的电阻时，介质中的能流密度和传输功率；
 - (2) 当内导体的电导率为 σ 时，从内导体表面流入导体的坡印亭矢量及单位长度表面的能流。
- 3.4 试用伦敦方程解释超导体的零电阻现象与迈斯纳效应。
- 3.5 若自由磁荷（磁单极）存在，试猜想应当怎样改写麦克斯韦方程组。
- 3.6 由麦克斯韦方程组导出电荷守恒定律。

第4章 电磁波的传播

麦克斯韦方程组的一个最重要的成果是预言了在迅变情况下电磁场以波动形式存在，形成在空间中传播的电磁波。所谓迅变情况，顾名思义，是指随时间迅速变化的情况，这种情况下的电磁场称为迅变电磁场。迅变电磁场与静电场和静磁场不同，它是由随时间变化很快的电荷、电流产生的，而且变化的电场与磁场相互激发，形成统一的电磁场，以波的形式运动。迅变电磁场可以脱离场源（迅变的电荷、电流）而独立存在。

近代科学中电磁波的应用已极为广泛，电磁波的传播、辐射和激发问题已发展成为独立的学科，具有十分丰富的内容。本章只介绍关于电磁波传播的最基本理论，第5章介绍电磁波的辐射和激发问题。

本章主要内容：

1. 无界空间中电磁波的传播，分别介绍真空、绝缘介质、导体中的情况。
2. 电磁波在介质界面上的反射和折射，分别介绍两种介质分界面和导体表面的情况。
3. 有界空间的电磁波，分别介绍波导管和谐振腔中的电磁波。

讲授思路：由麦克斯韦方程组导出电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的波动方程，从而揭示出电磁场的波动性。求亥姆霍兹方程的平面波解，讨论平面电磁波的特性及能量密度和能流密度。用电磁场的理论证明反射定律、折射定律、菲涅耳公式等，说明光就是电磁波。讨论电磁波在导体中的传播特征，再讨论波导管和谐振腔中的电磁波。

4.1 电磁波的波动性

4.1.1 真空中电磁场的波动方程

一般情况下，真空中电磁场的基本方程是麦克斯韦方程组，即式(3.2.6)。现在研究在自由空间中电磁波的运动形式。自由空间是指没有自由电荷和传导电流存在的空间，又称无源空间（ $\rho=0, \mathbf{j}=0$ ），也可以认为是脱离了场源（太阳、天线、激光器等）的无界空间，这种情况下的电磁场称为自由电磁场。自由电磁场没有受到电荷、电流的作用，是由变化电场和磁场相互激发的。在这种情况下，电磁场的运动规律由自由空间的麦克斯韦方程组导出

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1.1d)$$

对式(4.1.1b)取旋度并利用式(4.1.1a)得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

利用 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ ，将式 (4.1.1c) 代入上式，则有

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

于是可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

用同样的方法对式 (4.1.1a) 取旋度，并利用式 (4.1.1b)、式 (4.1.1d) 可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.3)$$

令

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4.1.4)$$

则式 (4.1.3) 与式 (4.1.4) 为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.6)$$

对以上两式做如下讨论。

(1) 可以看出式 (4.1.5) 和式 (4.1.6) 分别是 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 满足的齐次的波动方程。因此，满足这两个方程的电磁场都以波的形式运动。而电磁场的波动形式是由麦克斯韦方程组导出的，所以说，麦克斯韦方程组揭示了不稳定情况下电磁场的波动性，这就从理论上预言了电磁波的存在。

(2) 真空中传播的一切电磁波(包括各种频率范围的电磁波)，其传播速度均为 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ， c 仅与 ε_0 、 μ_0 有关，是一个普适常数。 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ ，所以

$$c = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 1.26 \times 10^{-6}}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ 的量纲是速度的量纲，它的值与纯粹用光学实验所求出真空中的光速相吻合，

这种吻合是光的电磁理论的主要依据之一。麦克斯韦方程组的另一功绩在于不仅统一了电和磁，还统一了电磁理论与光学，揭示了光就是电磁波。

(3) 如果没有电场和磁场的变化，波动方程变成拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

这两个方程与波动方程有着本质的不同。假定它们在全部空间都成立，即完全没有电荷与电流，而无限远处 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 也为零，则拉普拉斯方程的解只能是

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = 0$$

这表示整个空间都没有场，所以在恒定情况下（ \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 不随时间变化），场与源（电荷与电流）之间有着密切的联系，没有源就没有场。而当场迅速变化时，在相同条件下（ $\mathbf{j} = 0$ ， $\rho = 0$ ），波动方程仍有不为零的解，这表明电磁波的形成与传播必须同时有电场和磁场的变化，并且 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 随时间变化率也必须是变化的（ $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \neq 0$ ， $\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \neq 0$ ），另一方面也说明了变化的电磁场可以脱离电荷和电流而独立存在。它们与电荷、电流相互作用，但是它的存在并不依赖于电荷、电流，这是波动的通性。以水波为例，当湖面上受扰动处的水停止后，已传播出去的水波继续存在，并向前传播。

4.1.2 赫兹实验

1864 年，麦克斯韦从理论上预言了电磁波的存在，但其正确性有待于实验的验证。如果能用一种实验方法观察到电磁波的存在，那就是对这一理论正确性的最好的证明。

1886 年，赫兹（H. Hertz）设计了图 4-1 所示的一种电磁波发生器（直线型开放振荡器），这种振荡器包含感应圈和两根长 12 英寸（1 英寸=0.0254m）的铜棒，在铜棒上各焊一个磨光的黄铜球，两根铜棒放在同一直线上，两球之间留一空隙，将它们连到感应圈的次级线圈两端。当充电到一定程度时，间隙被火花击穿，两段金属杆连成一条导电通路，相当于一个振荡偶极子，能在其中激起频率为 $10^8 \sim 10^9 \text{ Hz}$ 的高频振荡。赫兹把这装置称为“振荡偶极子”，后被称为赫兹振子。为了探

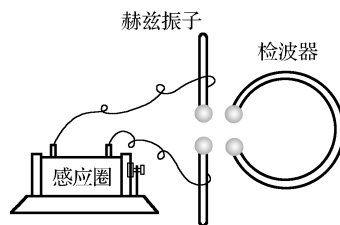


图 4-1 赫兹振子

测由赫兹振子发射出来的电磁波，赫兹还将一根粗铜导线弯成一圆环形，在环的开口端各焊上一黄铜球，两球间的距离还可以利用螺旋做微小调节，他将这种装置称为“共振偶极子”，作为检波器，放在电磁波发生器附近。如果给振荡偶极子输入高压脉冲电流，共振偶极子铜环两个小铜球之间微小的空隙会迸发出一个微弱的火花，赫兹把铜环移到与发生器相距一定距离并适当地选择其方位时，他们看到电火花在两个铜球之间不断地跳跃。这样，赫兹在实验中初次观察到电磁振荡在空间传播。后来，赫兹在暗室的墙上覆盖一块锌板，用来反射电磁波，当入射波和反射波叠加后将产生驻波，他用共振偶极子在离发生器不同距离的地方测驻波，火花较亮的地方，就是波峰或波谷；完全没有火花的地方，是波峰与波谷之间的零值。据此，赫兹量出驻波的波长，并计算了振荡偶极子的振荡火花频率，两者相乘即得电磁波的速率。计算出来的数值和麦克斯韦预料的完全相同，真空中电磁波的速率等于光速。赫兹接着还进行了关于电磁波的反射、聚焦、折射、衍射、干涉、偏振等多种实验，这样就完成了电磁波和光波具有同一性的实验验证。

4.1.3 电磁波谱图

广播电台和电视台发射的无线电波、雷达站发射的微波、可见光、X 射线、 γ 射线都是电磁波，在真空中，所有这些电磁波都以光速 c 传播。根据波长 λ 与频率 f 和波速之间满足的关

系，在真空中

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

(4.1.7)

所以电磁波可以用波长或频率区分，波长与频率互为倒数关系。频率和波长的变化范围可以覆盖多个数量级，为了简化数字，频率常用千赫、兆赫等表示，波长常用千米、毫米等表示，如表 4-1、表 4-2 所示。

表 4-1 频率常用单位

名称	符号	与 Hz 关系
千赫 (kiloHertz)	kHz	10^3
兆赫 (megaHertz)	MHz	10^6
吉赫 (gigaHertz)	GHz	10^9
太赫 (teraHertz)	THz	10^{12}
拍赫 (petaHertz)	PHz	10^{15}

表 4-2 波长常用单位

名称	符号	与 m 关系
千米 (kilometre)	km	10^3
毫米 (millimetre)	mm	10^{-3}
微米 (micrometre) (ormicron)	μm	10^{-6}
纳米 (nanometre)	nm	10^{-9}

理论上电磁波的频率可以从零到无穷大，实际上我们所掌握的电磁波的频率范围是有限的。在电磁波可用频率的范围内，按照频率或真空中波长的顺序把电磁波排列成谱，这种谱称为电磁波谱。电磁波包括相当宽广的频率范围，不同频率区段的电磁波，它们的产生机制、特征和用途各不相同。整个电磁波波谱如图 4-2 所示。

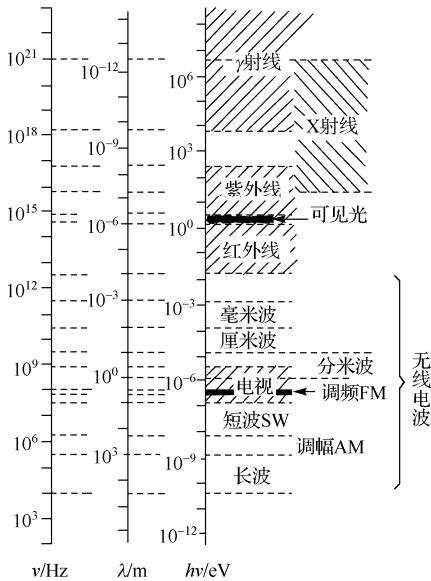


图 4-2 电磁波波谱

从图 4-2 可见，普通无线电波包括甚低频（VLF，3~30kHz）、低频（LF，30~300kHz）、中频（MF，300~3000kHz）、高频（HF，3~30MHz）、甚高频（VHF，30~300MHz），频率从几千 Hz 到 300MHz。如用波长来表示时，甚低频、低频、中频、高频、甚高频又称超长波、长波、中波、短波、超短波，波长范围为 $10^5\sim1\text{m}$ 。广义地说，微波是指频率为 0.3~300GHz 范围内的电磁波，其相应的波长范围是 $1\sim10^{-3}\text{m}$ 。根据应用上的特点，微波又可细分为分米波、厘米波、毫米波。微波与红外线的过渡段称为亚毫米波。光波所指的频率范围比可见光（400~

760nm)要宽。从现代激光和光学系统应用的频率来看,光波一般是指频率为 $100\sim 1000\text{THz}$ 的这段电磁波谱,相应的波长为 $3\sim 0.3\mu\text{m}$ 。比可见光波长更短的依次是紫外线、X射线、 γ 射线。

由于技术或习惯上的原因,人们常把电磁波分割成若干波段。下面对电磁波的各个波段分别进行简要介绍。

1. 无线电波

波长从几千米到几毫米范围内的电磁波,称为无线电波,无线电波由振荡偶极子所产生,它在技术上有极为重要的应用。现将无线电波波段的细分及其主要用途列于表4-3。

表 4-3 各种无线电波波段的范围及用途

波段			波长	频率	主要用途
长波			$30\sim 3\text{km}$	$10\sim 100\text{kHz}$	电报通信
中波			$3\sim 0.2\text{km}$	$100\sim 1\,500\text{kHz}$	无线电广播
中短波			$200\sim 50\text{m}$	$1.5\sim 6\text{MHz}$	电报通信、无线电广播
短 波			$50\sim 10\text{m}$	$6\sim 30\text{MHz}$	电报通信、无线电广播
超短波	米波	VHF	$10\sim 1\text{m}$	$30\sim 300\text{MHz}$	调频无线电广播、电视、导航
微波	分米波	UHF	$1\sim 0.1\text{m}$	$0.3\sim 3\text{GHz}$	手机通信、电视、雷达、导航
	厘米波	SHF	$10\sim 1\text{cm}$	$3\sim 30\text{GHz}$	电视、雷达、导航
	毫米波	EHF	$1\sim 0.1\text{cm}$	$30\sim 300\text{GHz}$	电视、导航、其他专门用途

有时用一些特定的字母代表微波中的某一波段,比较通行的代号如表4-4所示。

表 4-4 雷达波段代号

波段代号	P	L	S	C	X	K	Ku	Q	V
波段	米波	22cm	10cm	5cm	3cm	2cm	1.25cm	8mm	4mm

2. 太赫兹波

太赫兹波(THz波)或称为太赫兹射线(THz射线),是从20世纪80年代中后期才被正式命名的,在此以前,科学家们将统称为远红外射线。太赫兹波是指频率为 $0.1\sim 10\text{THz}$ 的电磁波,波长为 $0.03\sim 3\text{mm}$,介于微波与红外线之间。

太赫兹射线是一种新的、有很多独特优点的辐射源,物质的太赫兹光谱(包括透射谱和反射谱)包含着非常丰富的物理和化学信息,所以研究物质在该波段的光谱对于物质结构的探索具有重要意义。

3. 红外线

波长在($760\sim 10^6\text{nm}$)范围内的电磁波称为红外线。红外线主要是由炽热物体辐射出来的,红外线最显著的特征是它的热效应,生产中常用它来烘干物体。红外线虽然看不见,但可以通过特制的透镜(由氯化钠或锗等材料制成)成像,使特制的底片感光,应用于遥感探测技术,还可通过“图像变换器”转变为可见的像。军事上利用这些特性制成了多种“红外夜视”器材。此外还可制成红外通信设备、红外雷达、红外光谱分析仪等。

4. 可见光

波长在($400\sim 760\text{nm}$)范围内的电磁波,能够使人眼产生视觉效应,故称为可见光。不同波长的可见光呈现不同的颜色。大体说来,波长(频率)与颜色的对应关系如表4-5所示。

表 4-5 波长（频率）与颜色的对应关系

颜色	红	橙	黄	绿	青	蓝	紫
波长/nm	760~630	630~600	600~570	570~500	500~450	450~430	430~400
频率/ 10^{14} Hz	3.94~4.76	4.76~5.00	5.00~5.26	5.26~6.00	6.00~6.66	6.66~6.97	6.97~7.50

红光波长最长，紫光波长最短，白光则是三种或三种以上不同颜色的光按一定比例混合而成的。

5. 紫外线

波长在（5~400nm）范围内的电磁波称为紫外线。温度很高的物体可以辐射紫外线，太阳光中就含有紫外线，水银灯光中含有大量紫外线。紫外线有显著的生理效应，能杀死细菌，在食品工业和医疗上常用于杀菌消毒。紫外线还具有化学效应，可使照相底片感光。

6. X 射线

波长在（ 10^{-2} ~5nm）范围内的电磁波称为 X 射线。它是由高速电子流轰击原子内层电子而产生的电磁辐射。X 射线具有很强的穿透能力，能使照相底片感光，使荧光屏发光，能杀伤生物细胞。利用这些性质，在工业上可对金属部件进行无损探伤，在医疗上可对人体进行透视，做病理检查。

7. γ 射线

波长在 0.1nm 以下的电磁波称为 γ 射线。它是由原子核内的能级跃迁产生的电磁辐射。它可以由放射性原子核衰变或用高能粒子轰击原子核实现原子核的人工转变而产生。 γ 射线的波长比 X 射线的波长更短，能量更大，穿透能力更强。 γ 射线可用于金属探伤、放射治疗、研究原子核的内部结构。它也是原子武器的主要杀伤因素之一。

4.1.4 电磁波在介质中的传播

现在讨论有介质存在时的情况，这里涉及的介质是各向同性的均匀线性介质。很容易联想到对于介质中的情况，只需将真空中波动方程中的 ε_0 、 μ_0 换为 ε 、 μ 即可

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (4.1.8)$$

这样的推广是不对的，下面进行具体讨论。

1. 介质色散的影响

对各向同性的均匀线性介质，当电磁波具有某个确定频率并做正弦振荡时，介质分子电矩的大小取向都以电磁波的相同频率做正弦振荡。在静电场和静磁场中引入的 $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ， $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ 依然成立，只不过此时 χ_e 、 χ_m 和入射电磁波的频率有关。因此 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的关系应写成：

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \\ \mathbf{B} &= \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega) \\ \varepsilon &= \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)\end{aligned}\quad (4.1.9)$$

介质中的电容率 ε 和磁导率 μ 随频率 ω 而变的现象称为介质的色散。

当电磁波是某一确定频率时，介质中的 $\varepsilon(\omega)$ 、 $\mu(\omega)$ 为常数，类似真空情况下的推导，依然有波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

对一般非正弦变化的电磁场或当电磁场是一种以上频率的电磁波相叠加时，上述波动方程不成立，原因在于由于介质的色散， $\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t) = \mu \mathbf{H}(t)$ 不成立。

这种情况下，可以把电磁场作傅里叶展开

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \int \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ \mathbf{B}(t) &= \int \mathbf{B}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

由于色散， $\varepsilon(\omega)$ 、 $\mu(\omega)$ 是频率的函数，则

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(t) &= \int \mathbf{D}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \neq \varepsilon \mathbf{E}(t) \\ \mathbf{B}(t) &= \int \mathbf{B}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \neq \mu \mathbf{H}(t)\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

式中的 $\varepsilon(\omega)$ 、 $\mu(\omega)$ 不能提到积分号外，式 (4.1.8) 表示的波动方程不成立。因此，在介质内不能推出 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 的一般波动方程，只能得出一定频率的波动方程。

2. 电磁波在介质中传播的基本方程

在很多实际情况中，电磁波的激发源以大致确定的频率做正弦振荡，它们激发的电磁波也以相同的频率做正弦振荡，这种以一定频率做正弦振荡的波称为时谐电磁波，也称为定态电磁波或单色电磁波。

时谐电磁波是比较常见的，如无线电广播或通信载波、激光器辐射出的光束等。研究这种波不仅具有重要的实际价值，而且也是讨论一般电磁波的基础，因为一般电磁波都可以借助于傅里叶分析（频谱分析）方法分解为不同频率的正弦波的叠加。

一定频率的电磁波，设角频率为 ω ，可将电磁场随时间的变化关系用复数表示

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

写成复数形式是为了计算方便，而对于实际的时谐电磁波，只取其实数部分

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t\tag{4.1.13}$$

自由空间介质中的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\tag{4.1.14a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\tag{4.1.14b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.1.14c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1.14d)$$

在一定的频率下, 对线性均匀介质 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, 将 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 代入式 (4.1.14b) 可得

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = i\omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

消去共同因子 $e^{-i\omega t}$ 可得

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

同理, 可得

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

于是将式 (4.1.14) 化为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.1.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (4.1.15b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.1.15c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.1.15d)$$

式 (4.1.15) 是时谐情况下的麦克斯韦方程组, 式中 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 仅是 \mathbf{r} 的函数, 为了简洁, 以下不写出自变量。

在 $\omega \neq 0$ 的时谐电磁波情况下, 这组方程不是独立的, 取式 (4.1.15a) 的散度

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

可以得到式 (4.1.15c)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

同样取式 (4.1.15b) 的散度

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

可导出式 (4.1.15d)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

因此在一定频率下, 只有式 (4.1.15a)、式 (4.1.15b) 是独立的。而式 (4.1.15a)、式 (4.1.15b) 分别都包含 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} , 我们设法消去 \mathbf{H} , 得到只含 \mathbf{E} 的方程。

取式 (4.1.15b) 的旋度, 并利用式 (4.1.15a)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mu (-i\omega \varepsilon \mathbf{E}) = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

于是可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.16)$$

令

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (4.1.17)$$

则有

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.18)$$

式(4.1.18)为亥姆霍兹方程, 需要注意的是, 该式用了 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的条件。方程本身的解并不一定满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 为了得到确定的解, 必须加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 才能代表电磁波的解。解出 \mathbf{E} 后, 磁场 \mathbf{B} 可由

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu\epsilon} \nabla \times \mathbf{E}$$

得到。

概括以上讨论, 在一定频率下麦克斯韦方程组化为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ k^2 &= \omega^2 \mu\epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{B} &= -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

式中, 第一个方程称为亥姆霍兹方程, 是一定频率下电磁波在介质中传播的基本方程, 它的每一个满足 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的解都代表一种可能的波模。

类似地, 在一定频率下, 麦克斯韦方程组也可以化为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} &= 0 \\ k^2 &= \omega^2 \mu\epsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{\omega\mu\epsilon} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{i}{k\sqrt{\mu\epsilon}} \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

4.1.5 平面电磁波

亥姆霍兹方程的解的形式是多样的, 其具体形式由激发和传播条件决定。如广播天线发射的是球面波, 激光则是一束定向性很好的狭窄光束。现在讨论一种最基本的解——平面电磁波。

平面电磁波是传播方向一定的电磁波, 它的波前是垂直于传播方向的平面。设电磁波沿 x 方向传播, 如在垂直于 x 轴的任意平面上各点的场矢量方向和数值都相等, 这种电磁波就称为平面电磁波。研究平面电磁波有重要的实际意义。从点源发出的球面波, 当它达到远方时, 其中不大的一部分可视为只沿一个方向传播的平面波。例如, 太阳发出的电磁波到达地面上的部分就是平面电磁波。离广播电台几千米外的电磁波基本上也可视为平面电磁波。

因为沿 x 方向传播的平面电磁波在垂直于 x 方向的平面上各点场矢量相同, 则这种情况下 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 仅是 x 与 t 的函数, 与 y 、 z 无关。亥姆霍兹方程可简化为

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(x)}{dx^2} + k^2 \mathbf{E}(x) = 0 \quad (4.1.21)$$

方程的一个特解为

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{ikx} \quad (4.1.22)$$

由于与时间的函数关系 $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}(x) e^{-i\omega t}$ ，所以沿 x 方向传播的平面电磁波的完整表达式为

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.1.23)$$

亥姆霍兹方程的解只有加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 才能代表时谐电磁波的解，由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 可得 $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ 。因此只要 \mathbf{E}_0 与 x 轴垂直，式 (4.1.23) 就代表一种平面电磁波的解。

采用复数形式是为了计算方便，对于实际存在的电磁波，应理解为只取实数部分，即

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t) \quad (4.1.24)$$

式中 \mathbf{E}_0 是电场的振幅， $\cos(kx - \omega t)$ 是相位因子， $t=0$ 时，相位因子是 $\cos kx$ ， $x=0$ 的平面处于波峰。 $t=t$ 时，相位因子变为 $\cos(kx - \omega t)$ ，波峰移至 $kx - \omega t$ 处，即移至 $x = \frac{\omega}{k}t$ 的平面上，因此式 (4.1.24) 表示沿 x 方向传播的平面电磁波。其相速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (4.1.25)$$

真空中电磁波的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (4.1.26)$$

介质中电磁波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (4.1.27)$$

ϵ_r 是介质的相对电容率， μ_r 是介质的相对磁导率， $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ 是介质的折射率，它们都是角频率 ω 的函数。因此，在介质中，不同频率的电磁波有不同的相速度和折射率，这是介质的色散现象。

以上讨论的是沿 x 轴方向传播的平面电磁波，它的表达式为

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

当平面电磁波沿任意方向传播时，它的表达式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.1.28)$$

式中， \mathbf{k} 为波矢量，大小为 $|\mathbf{k}| = k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ ，即 $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，

方向为平面电磁波的传播方向， k 又称为波数。当 \mathbf{k} 的方向取 x 轴时， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx$ ，式 (4.1.28) 变为式 (4.1.23)。

为了看出 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 表示的是沿 \mathbf{k} 方向传播的平面电磁波，我们由图 4-3 来说明。

如图 4-3 所示，取垂直于矢量 \mathbf{k} 的任一平面 S ， P 点为此平面上任一点，位矢为 \mathbf{r}

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr'$$

r' 是 \mathbf{r} 在 \mathbf{k} 矢量上的投影。在平面 S 上，任意点的位矢在矢量 \mathbf{k} 上的投影都等于 r' ，因

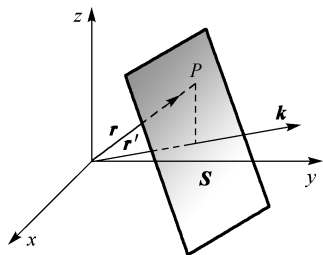


图 4-3 沿 \mathbf{k} 方向传播的平面电磁波

而整个平面是等相位面。因此, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 表示沿矢量 \mathbf{k} 方向传播的平面电磁波。换句话说, 有一个传播方向为 \mathbf{k} , 不沿 x 轴方向传播的平面电磁波, 垂直于 \mathbf{k} 的平面是等相位面, 为了写出它的表达式, 先令传播方向为 r' 轴, 可以写出

$$\mathbf{E}(r', t) = E_0 e^{i(kr' - \omega t)}$$

由于 $r' = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, 所以 $kr' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, 则表达式又可写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

平面电磁波的性质如下。

(1) 平面电磁波是横波, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 均与传播方向 \mathbf{k} 垂直。

沿 \mathbf{k} 方向传播的平面电磁波表达式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

此解必须加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 才能代表一种可能存在的波模

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

则有

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.1.29)$$

式 (4.1.29) 表明 \mathbf{E} 必须和传播方向 \mathbf{k} 垂直, 所以平面电磁波的电场波动是横波。 $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, \mathbf{E} 可在垂直于 \mathbf{k} 的任意方向上振荡。 \mathbf{E} 的取向称为电磁波的偏振方向, 一个给定的 \mathbf{k} 可取两个互相垂直的偏振方向, 因此对每个波矢量 \mathbf{k} , 存在两个独立的偏振波。

平面电磁波的磁场波动也是横波

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu\epsilon} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu\epsilon} i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}$$

令 $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{k}$ 为波传播方向的单位矢量, 则可得

$$\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (4.1.30)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) = 0 \quad (4.1.31)$$

因此, 磁场波动也是横波。

对时谐场 $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, 空间算符 ∇ 和时间算符 $\frac{\partial}{\partial t}$ 作用于 \mathbf{E} 的结果相当于做下列代换

$$\begin{aligned} \nabla &\rightarrow i\mathbf{k} \quad , \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow -i\omega \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \end{aligned}$$

(2) \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 互相垂直, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{k} 三者的方向构成右手螺旋关系。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} \times (\sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{E} \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{E}) \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} [E^2 \mathbf{e}_k - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{E}] \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{E} \perp \mathbf{e}_k$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_k = 0$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} E^2 \mathbf{e}_k \quad (4.1.32)$$

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向沿波矢 \mathbf{k} 方向。

(3) \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同相, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的数值关系比为电磁波在介质中的传播速度 v 。

因为 $\mathbf{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}$ 中 $\sqrt{\mu\epsilon}$ 是实数, 故 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 同相位。

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v \quad (4.1.33)$$

在真空中

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c \quad (4.1.34)$$

而

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z \quad (4.1.35)$$

Z 具有阻抗的量纲, 称为特征阻抗或波阻抗, 在真空中, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$ 。

(4) 平面电磁波在真空和理想绝缘介质中沿 \mathbf{k} 方向无衰减地传播。

平面电磁波沿传播方向 (z 方向) 各点上电场、磁场的瞬时图像如图 4-4 所示。

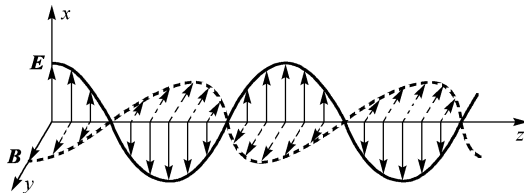


图 4-4 平面电磁波沿 z 方向传播的电场、磁场示意图

4.1.6 电磁波的能量和能流

由第 3 章, 我们知道电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right)$$

在平面电磁波的情况下

$$\epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

因此平面电磁波中电场能量和磁场能量相等

$$w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \mu H^2 \quad (4.1.36)$$

平面电磁波的能流密度为

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu\epsilon} E^2 \mathbf{e}_k \\ \mathbf{S} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{e}_k\end{aligned}\quad (4.1.37)$$

因为 $w = \epsilon E^2$ ，则

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} w \mathbf{e}_k = v w \mathbf{e}_k \quad (4.1.38)$$

可见， \mathbf{S} 就是带着能量密度为 w ，以速度 \mathbf{v} ($\mathbf{v} = v \mathbf{e}_k$) 向前“流动”的量，故称为能流密度。

计算能量密度和能流密度时应注意，能量密度和能流密度都是电场强度的二次式，不能将复数表示直接代入，计算 w 和 \mathbf{S} 的瞬时值时，应将实数代入

$$w = \epsilon E^2 = \epsilon E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (4.1.39)$$

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{e}_k = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e}_k \quad (4.1.40)$$

\mathbf{S} 、 w 都是随时间迅速变化的量，实际问题中只需用到它们的时间平均值。对一个周期的平均值

$$\bar{w} = \epsilon E_0^2 \overline{\cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2$$

式中

$$\overline{\cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

则有

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu} B_0^2 \quad (4.1.41)$$

同理可得

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \mathbf{e}_k \quad (4.1.42)$$

为了以后应用，下面给出二次式求平均值的一般公式。

设 $f(t)$ 、 $g(t)$ 有复数表示

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}, \quad g(t) = g_0 e^{-i(\omega t - \phi)}$$

ϕ 是 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的相位差。

fg 对一个周期的平均值为

$$\begin{aligned}\overline{fg} &= \frac{1}{T} \int_0^T f_0 \cos \omega t g_0 \cos(\omega t + \phi) dt = \frac{\omega}{2\pi} f_0 g_0 \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \cos \omega t \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f^* g)\end{aligned}\quad (4.1.43)$$

f^* 是 f 的复共轭, Re 表示实数部分。

因此, 能流密度的平均值

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\mathbf{E}^* \times \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Re}[(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_k - (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{E}] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \mathbf{e}_k\end{aligned}$$

同理, 能量密度的平均值

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) = \frac{\varepsilon}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2$$

【例 4-1】 有一平面电磁波, 波的表达式为

$$\mathbf{E} = 100 \text{e}^{\text{i}(2\pi \times 10^{-2} z - 2\pi \times 10^6 t)} \mathbf{e}_x \quad (\text{V} \cdot \text{m}^{-1})$$

求: (1) 圆频率、波长、介质中波速, 电场矢量的振动方向和波的传播方向;

(2) 若该介质的磁导率为 $4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, 问它的电容率 ε 是多少;

(3) 相应的磁场 \mathbf{H} ;

(4) 平均能量密度和平均能流密度。

解: (1) 平面电磁波的表达式为

$$\mathbf{E} = E_0 \text{e}^{\text{i}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

圆频率

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times 10^6 \text{s}^{-1}$$

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi \times 10^{-2}} = 100 \text{m}$$

波速

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{2\pi \times 10^6 \times 10^2}{2\pi} = 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电场矢量振动方向沿 x 轴方向, 波的传播方向沿 z 轴方向。

(2) 电磁波在介质中的传播速度为 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, 已知 v 、 μ 可以求出 ε 为

$$\varepsilon = \frac{1}{v^2 \mu} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{16}} = \frac{10^{-9}}{4\pi} \quad (\text{F} \cdot \text{m}^{-1})$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \\ &= \sqrt{\frac{10^{-9}}{(4\pi)^2 \times 10^{-7}}} \mathbf{e}_z \times 100 \text{e}^{\text{i}(2\pi \times 10^{-2} z - 2\pi \times 10^6 t)} \mathbf{e}_x \\ &= \frac{5}{2\pi} \text{e}^{\text{i}(2\pi \times 10^{-2} z - 2\pi \times 10^6 t)} \mathbf{e}_y \quad (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \\
 &= \frac{10^{-9} \times (10^2)^2}{2 \times 4\pi} = \frac{10^{-5}}{8\pi} \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}) \\
 \bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \mathbf{e}_k \\
 &= \frac{1}{2} \frac{10^{-1}}{4\pi} (10^2)^2 \mathbf{e}_z = \frac{10^3}{8\pi} \mathbf{e}_z \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})
 \end{aligned}$$

【例4-2】从微波炉泄漏出的微波场在某一点测得其电场强度为 $2\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ，请问该点功率密度是多少？对人体是否有危害？

解：某点的平均能流密度即该点的功率密度，设电磁波的传播方向为 z 方向

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \mathbf{e}_z$$

将 $E_0 = 2\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 及自由空间的波阻抗 $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega$ 代入，得到

$$\bar{S}_z = \frac{4}{2 \times 120\pi} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} = 0.53 (\mu\text{W} \cdot \text{cm}^{-2})$$

按照美国制定的安全标准，人暴露在微波场中微波功率密度不超过 $10\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$ ，时间不超过 6min ，所以上述微波泄漏对人体不会有危害。

4.2 电磁波在介质界面上的反射和折射

4.1 节讨论了电磁波在同一种介质中传播的性质，实际上还往往遇到经过不同界面的情况，这就需要研究电磁波在不同界面处的传播。用电磁场的理论证明反射和折射定律，并推导菲涅耳（A. J. Fresnel）公式。本节的主要内容是从电磁场的一般边值关系，导出定态电磁场在绝缘介质界面上的边值关系，由此讨论入射波、反射波、折射波三者之间的频率、传播方向、振幅、相位关系，从而得出反射与折射定律、布儒斯特角、半波损失和全反射现象，并讨论电磁波在导体表面的反射。

4.2.1 反射和折射定律

研究电磁波反射和折射问题的基础是平面电磁波表达式和电磁场在两个不同的介质界面上的边值关系。在一般情况下，电磁场的边值关系为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \boldsymbol{\alpha}_f \quad (4.2.1a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (4.2.1b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f \quad (4.2.1c)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (4.2.1d)$$

在绝缘介质界面上 $\alpha_f = 0$, $\sigma_f = 0$ 。在时谐电磁波情况下, 麦克斯韦方程组不是完全独立的, 由式 (4.1.15a)、式 (4.1.15b) 可导出式 (4.1.15c)、式 (4.1.15d)。与此相应, 介质界面上的边值关系也不是完全独立的, 由式 (4.2.1a)、式 (4.2.1b) 可推导式 (4.2.1c)、式 (4.2.1d)。因此, 对时谐电磁波, 只需满足边值关系

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (4.2.3)$$

虽然介质中的 \mathbf{B} 是基本物理量, 但由于 \mathbf{H} 直接和自由电流相关, 而且边界条件也由 \mathbf{H} 表示, 所以在研究电磁波的传播问题时, 往往用 \mathbf{H} 表示磁场比较方便。

设两种各向同性的均匀介质, 分别充满上、下半无限空间, 介质 1 和介质 2 的分界面为

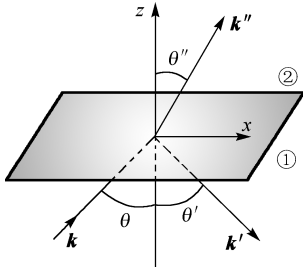


图 4-5 介质分界面上的入射、反射和折射波

无穷大平面。设单色平面电磁波从介质 1 入射于分界面上, 在该处产生反射波和折射波 (如图 4-5 所示)。设反射波、折射波也是平面电磁波, 它们都具有确定的频率和传播方向。

设入射波、反射波和折射波的电场强度分别为 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 、 \mathbf{E}'' , 波矢量分别为 \mathbf{k} 、 \mathbf{k}' 、 \mathbf{k}'' , 它们的平面波表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

应用边值关系式 (4.2.2), 注意介质 1 中的总电场强度为入射波与反射波电场强度的叠加, 而介质 2 中只有折射波, 因此

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{n} \times \mathbf{E}'' \quad (4.2.5)$$

将 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 、 \mathbf{E}'' 的表达式 (4.2.4) 代入

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)}$$

上式必须对整个界面和所有时间都成立, 分界面为 $z=0$ 的 xOy 平面, 则上式对 $z=0$ 和任意 x 、 y 、 t 都成立, 三个指数因子必须相等。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t \quad (4.2.6)$$

由式 (4.2.6) 可得到如下结论。

(1) $\omega = \omega' = \omega''$, 入射波、反射波、折射波的频率必须相等。这意味着作为麦克斯韦方程的平面电磁波解, 任何电磁波在界面反射、折射时, 频率不会改变。频率相同的物理原因在于它们都是波源发出的波和介质 1 和介质 2 中做受迫振动的电子所发射的波的叠加。由力学知识可知, 受迫振动的频率和周期性外力的频率相同。

(2) 所有三个波矢量对分界面的位置函数关系是相同的

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} \quad (4.2.7)$$

在 $z=0$ 平面上, 由于 x 、 y 是任意的, 它们的系数应各自相等, 则有

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y \quad (4.2.8)$$

因为入射波在 xOz 平面 ($y=0$ 平面), $k_y = 0$, 则 k'_y 、 k''_y 也应为零。因此, 反射波矢和

折射波矢都在同一平面上。

(3) 振幅 \mathbf{E}_0 、 \mathbf{E}'_0 、 \mathbf{E}''_0 间的关系必须满足边值关系

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_0) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}''_0$$

以 θ 、 θ' 、 θ'' 分别代表入射角、反射角和折射角, 则

$$k_x = k \sin \theta, \quad k'_x = k' \sin \theta', \quad k''_x = k'' \sin \theta'' \quad (4.2.9)$$

设 v_1 和 v_2 为电磁波在两介质中的相速度, 即波的传播速度

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1}, \quad k'' = \frac{\omega}{v_2} \quad (4.2.10)$$

将式 (4.2.9) 和式 (4.2.10) 代入式 (4.2.8), 由于 $k_x = k'_x = k''_x$, 则有

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta''$$

由于 $k = k'$, 则有

$$\theta = \theta' \quad (4.2.11)$$

又因为 $k = \frac{\omega}{v_1}$, $k'' = \frac{\omega}{v_2}$, $k \sin \theta = k'' \sin \theta''$, 则有

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2} \quad (4.2.12)$$

式 (4.2.11) 与式 (4.2.12) 就是我们熟知的光学中的反射和折射定律, 对电磁波来说

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

因此

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = n_{21} \quad (4.2.13)$$

n_{21} 表示介质 2 相对于介质 1 的折射率, 一般对于非铁磁介质, $\mu \approx \mu_0$, 即 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ 。

这时折射率基本上由界面两侧的电容率比决定, 即可以认为 $\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ 就是两介质的相对折射率。

4.2.2 菲涅耳公式

1. 推导菲涅耳公式

现在利用边值关系求入射波、反射波和折射波的振幅关系, 欲求出反射波和折射波的振幅与入射波的振幅的关系, 必须利用分界面 $z = 0$ 平面的边值关系

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}') = \mathbf{n} \times \mathbf{E}'' \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}') = \mathbf{n} \times \mathbf{H}'' \quad (4.2.15)$$

在每种介质中, 单色平面波的 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 的关系为

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (4.2.16)$$

由于每一波矢 \mathbf{k} 有两个独立的偏振波, 所以需要分别讨论 \mathbf{E} 垂直于入射面和 \mathbf{E} 平行于入射面的两种情形。

(1) $\mathbf{E} \perp$ 入射面 (垂直纸面向外), 如图 4-6 (a) 所示。

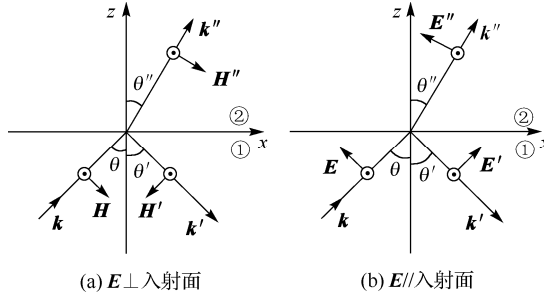


图 4-6 电磁波反射、折射示意图

根据边值关系式 (4.2.14), 由于 \mathbf{E} 的切向分量连续, 即平行于界面的分量连续, 可以写出

$$E + E' = E'' \quad (4.2.17)$$

根据式 (4.2.15), \mathbf{H} 的切向分量连续, 可以写出

$$H \cos \theta - H' \cos \theta' = H'' \cos \theta'' \quad (4.2.18)$$

对式 (4.2.16), 对非铁磁性的一般磁介质, 取 $\mu = \mu_0$, 则 $H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} E$, 式 (4.2.18) 可以写成

$$\sqrt{\epsilon_1} (E - E') \cos \theta = \sqrt{\epsilon_2} E'' \cos \theta'' \quad (4.2.19)$$

将式 (4.2.17) 乘以 $\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''$, 与式 (4.2.19) 相减消去 E'' 项, 可得

$$E(\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta'') = E'(\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta'')$$

即

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta''}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta''} \quad (4.2.20)$$

利用折射定律式 (4.2.13), 经过化简整理, 则有

$$\frac{E'}{E} = \frac{-\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (4.2.21)$$

式 (4.2.21) 为反射波 \mathbf{E}' 矢量垂直于入射面分量与入射波 \mathbf{E} 矢量垂直于入射面分量的比值。

同理, 式 (4.2.17) 乘以 $\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta$ 与式 (4.2.19) 相加消去 E' , 可得到

$$2\sqrt{\epsilon_1} E \cos \theta = E''(\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta'')$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta''} \quad (4.2.22)$$

利用折射定律式 (4.2.13), 经化简整理则有

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (4.2.23)$$

式 (4.2.23) 为折射波 E'' 矢量垂直于入射面分量与入射波 E 矢量垂直于入射面分量的比值。

(2) $E \parallel$ 入射面 (相当于 $H \perp$ 入射面向外), 如图 4-6 (b) 所示。

利用边值关系式 (4.2.15), H 的切向分量连续, 即平行于界面的分量连续, 可以写出

$$H + H' = H'' \quad (4.2.24)$$

利用式 (4.2.14) 中 E 的切向分量连续可以写出

$$E \cos \theta - E' \cos \theta = E'' \cos \theta'' \quad (4.2.25)$$

由于 $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E$, 式 (4.2.24) 可写成

$$\sqrt{\varepsilon_1} (E + E') = \sqrt{\varepsilon_2} E'' \quad (4.2.24a)$$

两边同乘以 $\cos \theta''$

$$\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta'' (E + E') = \sqrt{\varepsilon_2} E'' \cos \theta'' \quad (4.2.24b)$$

式 (4.2.25) 两边同乘以 $\sqrt{\varepsilon_2}$, 得到

$$\sqrt{\varepsilon_2} E \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2} E' \cos \theta = \sqrt{\varepsilon_2} E'' \cos \theta'' \quad (4.2.25a)$$

式 (4.2.24b) 与式 (4.2.25a) 两式相减消去 E'' , 可得

$$E(\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta'') - (\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta'') E' = 0$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta''} \quad (4.2.26)$$

利用折射定律式 (4.2.13), 再进行化简可得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \quad (4.2.27)$$

式 (4.2.27) 为折射波 E' 矢量平行于入射面分量与入射波 E 矢量平行于入射面分量的比值。

利用 $\sqrt{\varepsilon_1}$ 乘以式 (4.2.25), 用 $\cos \theta$ 乘以式 (4.2.24a), 可以得到

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_1} E \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1} E' \cos \theta &= \sqrt{\varepsilon_1} E'' \cos \theta'' \\ \sqrt{\varepsilon_1} E \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1} E' \cos \theta &= \sqrt{\varepsilon_2} E'' \cos \theta \end{aligned}$$

两式相加, 消去 E' 得

$$2\sqrt{\varepsilon_1} E \cos \theta = (\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta'' + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta) E''$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta'' + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta} \quad (4.2.28)$$

利用折射定律式 (4.2.13), 再经过化简整理可得

$$\frac{E''}{E} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \quad (4.2.29)$$

式 (4.2.29) 为折射波 \mathbf{E}'' 矢量平行于入射面分量与入射波 \mathbf{E} 矢量平行于入射面分量的比值。

以上利用电磁场边值关系得到的式 (4.2.21)、式 (4.2.23)、式 (4.2.27)、式 (4.2.29) 就是光学中熟知的菲涅耳公式。

$$\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (4.2.30a)$$

$$\frac{E''_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'')} \quad (4.2.30b)$$

$$\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \quad (4.2.30c)$$

$$\frac{E''_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \quad (4.2.30d)$$

式中, \perp 表示垂直于入射面, \parallel 表示平行于入射面。菲涅耳公式给出了反射波、折射波与入射波振幅大小之间的关系。在光的电磁场理论尚未建立时, 菲涅耳用其他方法求出且由实验证实, 故称为菲涅耳公式。利用电磁场的边值关系自然地得到菲涅耳公式, 有力地验证了光就是电磁波。

如果入射波的电场 \mathbf{E} 取任意方向, 总能将它分解为垂直于入射面的 E_{\perp} 和平行于入射面的 E_{\parallel} , 则反射波和折射波电场的垂直分量 E'_{\perp} 、 E''_{\perp} 与入射波 E_{\perp} 比值可用式 (4.2.30a) 和式 (4.2.30b) 分别表示, 平行于入射面的分量 E'_{\parallel} 、 E''_{\parallel} 与 E_{\parallel} 比值可用式 (4.2.30c) 和式 (4.2.30d) 表示。由菲涅耳公式可以看出, 垂直于入射面偏振的波与平行于入射面偏振的波反射和折射行为不同。

2. 布儒斯特定律

用菲涅耳公式可推出布儒斯特定律。当电磁波投射到介质面上时, 如果入射角恰能满足

$$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \quad (4.2.31)$$

由式 (4.2.30c) 可知, $E'_{\parallel} = 0$ 。

这表示反射波的电场矢量 \mathbf{E}' 不含有平行于入射面的分量, 只有垂直于入射面的分量。如果入射波为自然光 ($\mathbf{E}_{\perp}^2 = \mathbf{E}_{\parallel}^2$), 反射光就为垂直于入射面偏振的完全偏振光, 这就是光学中的布儒斯特定律。此时的入射角 θ 称为布儒斯特角, 用 θ_0 表示。

3. 半波损失

菲涅耳公式同时也给出了入射波、反射波和折射波的相位关系。下面利用菲涅耳公式讨论电磁波在两种介质表面反射时的相位变化。

对 $\mathbf{E} \perp$ 入射面的情形, 当垂直入射时, $\theta = \theta'' = 0$, 由式 (4.2.20) 与式 (4.2.22) 可得

$$\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \quad (4.2.32)$$

$$\frac{E''_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \quad (4.2.33)$$

如果 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ，即当光从光密介质向光疏介质入射时， $\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} > 0$ ，反射波电场与入射波电场同相，

反射波的相位不变。而 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ， $\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} < 0$ ，反射波电场与入射波电场反相，当光从光密介质向光疏介质入射时，反射波的相位改变 π 。由式 (4.2.33) 可知，折射波的相位和入射波的相位相同。

如果不是垂直入射，折射波的相位总是和入射波相同，反射波的相位与 θ 、 θ'' 有关，仅讨论 \mathbf{E} 垂直于入射面的情况，如果 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ，即光由光疏介质入射到光密介质，此时

$$\theta > \theta'', \quad \sin(\theta - \theta'') > 0, \quad \sin(\theta + \theta'') > 0$$

由式 (4.2.30a) 可知

$$\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} < 0$$

这表示反射波电场与入射波电场反向，方向相反，相位变化为 π 。这一现象称为反射过程中的半波损失。

以上讨论与光学实验完全符合，这进一步验证了光的电磁本质，光就是一种电磁波。

4. 全反射

除铁磁介质外，一般介质 $\mu \approx \mu_0$ ，因此通常可认为

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}, \quad \sin \theta'' = \frac{\sin \theta}{n_{21}}$$

入射角的变化范围为 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \theta$ 的值为 $0 \rightarrow 1$ 。若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ， $n_{21} < 1$ ，即当电磁波由光密介质

入射到光疏介质时，当 $\theta = \theta_c \left(\theta_c < \frac{\pi}{2} \right)$ ，可使

$$\theta'' = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \theta'' = 1, \quad \sin \theta = n_{21}$$

这时电磁波将沿着界面传播而不入射到介质 2

$$\theta_c = \arcsin \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right) \quad (4.2.34)$$

θ_c 称为临界角。而当入射角满足 $\theta > \theta_c$ 时，显然会出现 $\sin \theta'' > 1$ 的情况，这时折射角将为一虚数，它已失去几何上作为角度的直观解释，因而将出现不同于一般反射、折射的现象。这种情况下的电磁波传播有很特殊的性质，称为全反射。

下面讨论全反射时电磁波的性质。

(1) 折射波为表面波

假设在这种情况下, 两种介质中的电场形式仍然为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} \\ \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} \end{aligned}$$

边值关系 $k_x = k'_x = k''_x$, $k_y = k'_y = k''_y = 0$ 仍然成立

$$k''_x = k_x = k \sin \theta$$

$$k'' = k \frac{v_1}{v_2} = k n_{21}$$

当 $\theta > \theta_c$, $\sin \theta > n_{21}$ 时, 由以上两式可得

$$k''_x > k''$$

又因为 $k''^2 = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2$, 则有

$$k_z'' = \sqrt{k''^2 - k_x'^2} = \sqrt{k^2 n_{21}^2 - k^2 \sin^2 \theta} = k \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}$$

因为 $\sin \theta > n_{21}$, 则 $\sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta}$ 根号内是小于 0 的数, k_z'' 变为虚数, 用复数表示为

$$k_z'' = i k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

令

$$k_z'' = i \kappa, \quad \kappa = k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} \quad (4.2.35)$$

则折射波电场表示为

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}''_0 e^{i(k_x'' x + k_z'' z - \omega t)}$$

即

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (4.2.36)$$

式 (4.2.36) 表示折射波将沿 x 方向传播, 沿 z 方向衰减。因此, 这种波只存在于界面附近一薄层内。当 $z = \frac{1}{\kappa}$ 时, 振幅衰减到原值的 $\frac{1}{e}$, 定义衰减长度为 $\frac{1}{\kappa}$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \quad (4.2.37)$$

λ_1 为介质 1 中的波长, 一般说来, 离界面几个波长处电场振幅已变得很小, 可以忽略不计。因此折射波不仅沿着界面方向传播, 而且被限制在表面附近的一个区域内, 所以称这种全反射时的折射波为表面波。

(2) 反射波的偏振性质

由 $\sin \theta'' = \frac{\sin \theta}{n_{21}}$ 可得到

$$\cos \theta'' = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1} \quad (4.2.38)$$

将上式中 $\cos \theta''$ 代入式 (4.2.20) 与式 (4.2.26), 可得

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''} = \frac{\cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \quad (4.2.39)$$

$$\frac{E'_\parallel}{E_\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta''} = \frac{n_{21}^2 \cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \quad (4.2.40)$$

于是

$$|E'_\perp| = |E_\perp|, \quad |E'_\parallel| = |E_\parallel|$$

即

$$\left| \frac{E'_\perp}{E_\perp} \right| = 1, \quad \left| \frac{E'_\parallel}{E_\parallel} \right| = 1 \quad (4.2.41)$$

由式 (4.2.41) 可知, 反射波与入射波具有相同的振幅, 反射波的平均能量与入射波相等, 电磁波的能量全部被反射, 这就是全反射的情况。

从反射波与入射波振幅公式看出, 若 E 是实数, E' 是复数, E' 与 E 之比为复数, 这表示反射波的相位有变化, 即反射波与入射波有一定的相位差

令

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp} = e^{-i2\phi_\perp}, \quad \frac{E'_\parallel}{E_\parallel} = e^{-i2\phi_\parallel}$$

容易求出

$$\tan \phi_\perp = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta}, \quad \tan \phi_\parallel = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta} \quad (4.2.42)$$

可见对 \mathbf{E} 矢量平行于入射面与垂直于入射面相位差各不相同, 当入射波是线偏振时, 反射波的平行分量与垂直分量间的相位差为

$$\phi = 2\phi_\parallel - 2\phi_\perp$$

若 $\phi = 0$, 表示入射波是线偏振波, 反射波也是线偏振波; 若 $\phi \neq 0$, 则反射波的偏振与入射波的偏振不同。光学中产生偏振光的一个重要方法就是利用全反射来产生的, 如利用菲涅耳棱镜产生的偏振光。

(3) 全反射的能流分布

既然存在折射波, 那么在第二介质中就有能流。为方便起见, 考虑 $\mathbf{E}'' \perp$ 入射面, 即 $\mathbf{E}'' = E''_y \mathbf{e}_y$ (入射面为 xOz 平面), 则折射波电场强度为

$$\mathbf{E}'' = E''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k_x x - \omega t)} \mathbf{e}_y$$

折射波的磁场强度

$$\mathbf{H}'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{\mathbf{k}''}{k''} \times \mathbf{E}''$$

则

$$H_z'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k_x''}{k''} E_y'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k \sin \theta}{kn_{21}} E_y'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{\sin \theta}{n_{21}} E_y''$$

$$H_x'' = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{k_z''}{k''} E_y'' = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{i\kappa}{kn_{21}} E_y'' = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1} E_y''$$

折射波平均能流密度

$$\overline{S_x''} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y''^* H_z'') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} |E_0''|^2 e^{-2\kappa z} \frac{\sin \theta}{n_{21}} \quad (4.2.43)$$

$$\overline{S_z''} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y''^* H_x'') = 0 \quad (4.2.44)$$

可见折射波平均能流密度只有 x 分量, 沿 z 方向透入第二介质的平均能流密度为零。虽然折射波平均能流密度为零, 但瞬时能流密度却不为零

$$S_z'' = E_y'' H_x'' = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1} |E_0''|^2 e^{-2\kappa z} \cos 2(k_x x - \omega t)$$

前半周期能流沿正 z 方向, 后半周期沿负 z 方向, 这说明在全反射情况下, 并不是没有能量流入到第二介质。实际过程是入射波投射到界面上, 有一部分折射光透入到第二介质, 它所携带的能量进入了第二介质。在下半周期, 折射波再带着能量流回到第一介质, 因而进入第二介质的平均能量为零。

关于全反射有如下结论: 折射波只沿 x 轴传播, 反射波与入射波振幅相等, 有一相位差。前半周内电磁能量进入第二种介质, 是以储存能量的形式存在的, 在后半周内释放出来, 变为反射波能量。

全反射在光学技术中有重要应用, 光导纤维通信就是利用全反射原理使光在光导纤维中传播。光导纤维是由带涂层的玻璃丝制成的, 涂层的折射率小于玻璃丝的折射率, 光线以一定的角度入射到玻璃丝中, 当入射到玻璃和涂层界面上的入射角大于临界角时, 发生全反射, 如图 4-7 所示。其中, 纤芯为折射率 $n_1=1.4682$ 的掺锗的石英, 包层为折射率 $n_2=1.4447$ 的纯石英。光束以一定角度入射到光纤中, 当到达纤芯和包层界面上的入射角大于临界角时, 发生全反射, 并不断向前传输。

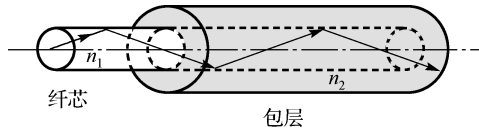


图 4-7 光在光纤中发生全反射示意图

4.3 电磁波在导体中的传播

4.1 节和 4.2 节讨论的是真空和理想绝缘介质中的自由电磁波的传播问题, 在真空和理想绝缘介质内部, 没有能量损耗, 电磁波可以无衰减地传播。本节研究导体中的电磁波, 导体内有自由电子, 在电磁波电场作用下, 自由电子运动形成传导电流, 由电流产生的焦耳热使

电磁波能量不断损耗, 因此导体内的电磁波是一种衰减波。本节从导体内部的麦克斯韦方程组出发, 引入定态和复电容率的概念, 得出导体内的亥姆霍兹方程, 然后求出它的平面波解, 讨论导体内平面波的传播规律。

4.3.1 电磁波与导体相互作用的特点

在真空或绝缘介质中, 自由空间 ($\mathbf{j}=0$, $\rho=0$) 电磁波的传播与导体中电磁波的传播特性不同, 这是由电磁波与导体相互作用的特点所决定的。导体内传导电流 $\mathbf{j} \neq 0$, 这是导体内的自由电子在电磁波的电场作用下形成的。

另外, 在静电场中, 均匀导体内部自由电荷密度 $\rho=0$, 自由电荷只分布在导体表面上, 在迅变的电磁场中, 导体内部自由电荷如何分布? 是否 $\rho=0$ 呢? 下面来证明这个问题。

设导体内部有自由电荷分布, 其密度为 ρ , 其激发的电场满足

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.3.1)$$

在电场 \mathbf{E} 作用下, 导体内引起传导电流, 满足欧姆定律

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.3.2)$$

由以上两式可得

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (4.3.3)$$

式 (4.3.3) 表示当导体内某处有电荷密度 ρ 出现时, 就有电流从该处向外流出, 从物理上看这是明显的, 因为假如某区域内有电荷积累, 电荷之间相互排斥, 必然引起向外发散的电流。由于电荷外流, 区域体积之内的电荷密度减小, 由电荷守恒定律

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad (4.3.4)$$

解此方程得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (4.3.5)$$

ρ_0 为 $t=0$ 时的电荷密度, 式 (4.3.5) 说明电荷密度随时间指数衰减, 衰减的快慢只与导体的 σ 和 ε 有关, 而与电磁场无关。定义 ρ 值衰减小到 $\frac{\rho_0}{e}$ 的时间为衰减的特征时间 τ

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (4.3.6)$$

因此, 只要电磁波的频率满足 $\omega \ll \tau^{-1}$, 即

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1 \quad (4.3.7)$$

就可认为 $\rho(t)=0$ 。因此, 式 (4.3.7) 可视为良导体的条件。

一般的金属导体 $\tau \sim 10^{-17}$ s, 如铜 $\tau = 1.5 \times 10^{-19}$ s, 只要电磁波的频率远小于 10^{17} Hz, 一般金属导体都可视为良导体, 良导体内部自由电荷体密度为零, 电荷只分布于导体表面上。

4.3.2 导体中的电磁波方程

设导体是均匀各向同性的, 导体内部 $\rho=0$, $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, 导体内部的麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

对角频率为 ω 的电磁波, $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, 则有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{4.3.9}$$

把式 (4.3.9) 与绝缘介质情况的方程组 (4.1.15) 相比, 两者的差别仅在于第一式右边多了一项 $\sigma\mathbf{E}$ 。如果形式上引入导体的复电容率

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}\tag{4.3.10}$$

式 (4.3.9) 中第一式可写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon'\mathbf{E}\tag{4.3.11}$$

现在与绝缘介质中的相应方程在形式上完全相同, 唯一不同的是将 ε 换为 ε' , 因此, 只将绝缘介质中的电磁波解所含的 ε 换为 ε' , 即可得到导体内的电磁波解。

下面先讨论复电容率的物理意义, 式 (4.3.9) 中第一式右边两项分别代表位移电流和传导电流, 传导电流与电场同相位。它的耗散功率密度为

$$\frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2\tag{4.3.12}$$

而位移电流与电场有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差, 它不消耗功率

$$\frac{1}{2}\text{Re}(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) = 0\tag{4.3.13}$$

因此, 在理想绝缘介质中, 产生磁场的只有位移电流, 它与 ε 有关。而在导体中除了位移电流外, 还有传导电流, 它与电导率有关。位移电流与传导电流两者相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 。正是这个原因, 电场与位移电流两者相位差为 $\frac{\pi}{2}$, 电场对位移电流不做功。而电场与传导电流同相位, 故电场对传导电流做功, 这就引起了焦耳热损耗, 从而使电磁波衰减。

相应的式 (4.3.10) 中复电容率的实数部分为位移电流, 不引起电磁波功率的耗散, 虚数部分为传导电流, 要引起能量耗散。

在一定的频率下，对应于绝缘介质内的亥姆霍兹方程式 (4.1.19)，在导体内部有

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ k &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{B} &= -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}\quad (4.3.14)$$

【例 4-3】海水的电导率 $\sigma = 4 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ ，相对电容率 $\varepsilon_r = 81$ 。求海水在频率 $f = 1 \text{ kHz}$ 和 $f = 1 \text{ GHz}$ 时的复电容率 ε' 。

解：当 $f = 1 \text{ kHz}$ 时

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} = 81 \times 8.85 \times 10^{-12} + i \frac{4}{2\pi \times 10^3} \\ &= 7.16 \times 10^{-10} + i 6.37 \times 10^{-4} \approx i 6.37 \times 10^{-4} (\text{F} \cdot \text{m}^{-1})\end{aligned}$$

当 $f = 1 \text{ GHz}$ 时

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} = 81 \times 8.85 \times 10^{-12} + i \frac{4}{2\pi \times 10^9} \\ &= 7.16 \times 10^{-10} + i 6.37 \times 10^{-10} (\text{F} \cdot \text{m}^{-1})\end{aligned}$$

4.3.3 导体中的平面电磁波

导体中的亥姆霍兹方程式 (4.3.14) 形式上也有平面电磁波解

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.3.15)$$

因为 $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$ 是一个复数，所以 \mathbf{k} 是一个复矢量。

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha} \quad (4.3.16)$$

导体中平面电磁波的表达式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}^{i(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4.3.17)$$

由式 (4.3.17) 可见，导体中的电磁波是一个衰减波。波矢量 \mathbf{k} 的实部 $\boldsymbol{\beta}$ 描述波传播的相位关系，虚部 $\boldsymbol{\alpha}$ 描述波振幅的衰减。 $\boldsymbol{\beta}$ 称为相位常数， $\boldsymbol{\alpha}$ 称为衰减常数。 $\boldsymbol{\alpha}$ 与电导率有关，对于绝缘介质， $\sigma = 0$ ，从而 $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ，所以绝缘介质中传播的电磁波其振幅不变。由式 (4.3.16) 和 $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$ ，可以得到

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \quad (4.3.18)$$

比较式 (4.3.18) 的实部与虚部

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{2} \omega \mu \sigma\end{aligned}\quad (4.3.19)$$

一般情况下，矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$ 的方向不一定相同，只有当平面电磁波垂直射入导体时，两者的方向一致。一般由边值关系和 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的关系式 (4.3.19) 可解出 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 。例如，当电磁波

从空间入射到导体表面, 以 $\mathbf{k}^{(0)}$ 表示空间中的波矢量, \mathbf{k} 表示导体中的波矢量, 设入射面为 xOz 面, z 轴为指向导体内部的法线, 由边值关系式 (4.2.8) 有

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x \quad (4.3.20)$$

空间中波矢量 $k_x^{(0)}$ 为实数, 因此式 (4.3.20) 中 $\alpha_x = 0$, $\beta_x = k_x$, 即矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直于导体表面, 由式 (4.3.20) 及式 (4.3.19) 可解出 α_z 、 β_z , 从而确定 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 。

为简单起见, 只考虑电磁波垂直入射于导体表面的情况下 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的值。

设导体表面为 xOy 平面, z 轴指向导体内部, 这种情况下 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都沿 z 轴, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 只有 z 分量, 式 (4.3.17) 可以写为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-i(\beta z - \omega t)} \quad (4.3.21)$$

由式 (4.3.19) 可解出

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.22)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.23)$$

由式 (4.3.21) 的相位因子, 可以得到导体中的电磁波传播的相速度为

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3.24)$$

由式 (4.3.24) 可知:

- (1) 相速度 v 随角频率 ω 而变化, 因此导体中的电磁波存在色散效应;
- (2) 在金属导体中, 电磁波传播的相速度比绝缘介质中要大大降低。

【例 4-4】 证明在良导体内, 非垂直入射情形有

$$\alpha_z \approx \beta_z = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}, \quad \beta_x \ll \beta_z$$

解: 入射波矢量在 xOz 平面上, 设空间中入射波矢量为 $\mathbf{k}^{(0)}$, 由边值关系式 (4.2.8)

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x, \quad k_y = 0$$

空间中的波矢量为实数, 则有

$$\alpha_x = 0, \quad \beta_x = k_x^{(0)}$$

由式 (4.3.18) 和式 (4.3.7), 良导体内波矢量的平方为

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$$

因而

$$\beta^2 \approx \alpha^2$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_x \beta_x + \alpha_z \beta_z = \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \gg \frac{1}{2} k^{(0)2}$$

这是因为 $\mu \approx \mu_0$, ε 与 ε_0 处于同一数量级, 在空间中 $k^{(0)2} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ 。对良导体, $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \gg 1$ 。

因此可得

$$\alpha_z \beta_z \gg \frac{1}{2} k^{(0)2}$$

又由于 $k^{(0)} > \beta_x$, 则有

$$\alpha_z \beta_z \gg \beta_x^2$$

由 $\beta^2 \approx \alpha^2$ 可得

$$\beta_x^2 + \beta_z^2 = \alpha_z^2$$

略去 β_x^2 可得

$$\alpha_z = \beta_z = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}, \quad \beta_x \ll \beta_z$$

因此在任意入射的情况下, α 垂直于表面, β 亦接近于法线方向。

4.3.4 趋肤效应和穿透深度

式 (4.3.21) 表示一个平面电磁波沿 z 轴方向传播, 在 $z > 0$ 区域内, 波将按指数衰减, 波幅降至原值的 $\frac{1}{e}$ 时的传播距离称为穿透深度 δ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (4.3.25)$$

分两种情况讨论:

(1) 当 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \ll 1$ 时

此条件意味着导体中的传导电流比位移电流小得多。这种情况只出现在不良导体或导电性能较好但电磁波的频率很高的情况。当 $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1$ 时, 精确到一阶 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}$

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}$$

由式 (4.3.22) 和式 (4.3.23) 可得

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (4.3.26)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (4.3.27)$$

$$k = \beta + i\alpha \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} + i \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (4.3.28)$$

可见, 只要 σ 与 ω 无关, 则衰减速度不受 ω 的影响, 而随 σ 的增大而增大, 但因 $\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$, 则衰减是很小的, 因此, 对不良导体穿透深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (4.3.29)$$

(2) 当 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 时

传导电流远大于位移电流, 金属导体属于这种情况。在这种情况下, 由式 (4.3.22) 和式 (4.3.23) 可得

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (4.3.30)$$

因此对良导体, 穿透深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (4.3.31)$$

由式 (4.3.31) 可见, 穿透深度 δ 与电导率 σ 和电磁波角频率 ω 的平方根成反比。 ω 、 σ 越大, 衰减越快。对于理想导体 $\sigma \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ 。 δ 随 ω 、 σ 的增大而减小, 电磁波被局限在导体表面以下极薄的一层中, 远离表面的导体内部, 电磁场实际为零。

例如, 对铜来说, σ 约为 $5.7 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, 当频率为 50Hz 时, δ 约为 0.9cm; 当频率为 100MHz 时, δ 约为 $0.7 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 。由此可知, 高频电磁波与光很难穿透金属, 这就是金属为什么不透光, 以及为什么电子仪器常用铝质屏蔽罩能把电磁波屏蔽起来的原因。对于高频电磁波, 电磁场及和它相互作用的高频电流仅集中于表面很薄一层中, 这种现象称为趋肤效应。

4.3.5 磁场与电场的关系

下面讨论在电磁波垂直入射情况下, 导体中磁场和电场的关系。

由式 (4.3.14) \mathbf{B} 与 \mathbf{E} 的关系式可写出

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{i}}{\mu\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{i}}{\mu\omega} \mathbf{i} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{\mu\omega} \times \mathbf{E}$$

而

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = (\beta + \mathbf{i}\alpha) \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}$$

则有

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} (\beta + \mathbf{i}\alpha) \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (4.3.32)$$

\mathbf{e}_k 为指向导体内部的法线。对于良导体, 由式 (4.3.30) 则有

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1 + \mathbf{i}) \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \quad (4.3.33)$$

由式 (4.3.33) 可知:

(1) 导体内的电磁波仍然是横波, 并且电场、磁场与传播方向互相垂直, 三者满足右手螺旋关系。

(2) 金属导体中, 磁场相位比电场相位滞后 $\frac{\pi}{4}$;

(3) 磁场与电场的振幅绝对值之比为 $\left|\frac{H}{E}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}$;

两边同乘以 $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left|\frac{H}{E}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1 \quad (4.3.34)$$

由式 (4.3.34) 可知, $\mu H^2 \gg \varepsilon E^2$, 即在金属导体中磁场贡献的能量比电场大得多, 金属导体内电磁波的能量主要是磁场能量。而在真空和绝缘介质中, 电场能量和磁场能量相等 $\varepsilon E^2 = \mu H^2$ 。例如, 铜中当频率为 1 MHz 时, $\left|\frac{E}{H}\right|$ 的比值为 $3.7 \times 10^{-4} \Omega$; 在真空中频率为 1 MHz 时, $\left|\frac{E}{H}\right|$ 的比值为 377Ω 。

表 4-6 一些金属材料的趋肤深度

材料名称	电导率 $\sigma / (\text{S} \cdot \text{m}^{-1})$	趋肤深度 $\delta / (\text{m})$
银	6.17×10^7	$0.064 / \sqrt{f}$
紫铜	5.8×10^7	$0.066 / \sqrt{f}$
铝	3.72×10^7	$0.083 / \sqrt{f}$
钠	2.1×10^7	$0.11 / \sqrt{f}$
黄铜	1.6×10^7	$0.13 / \sqrt{f}$
锡	0.87×10^7	$0.17 / \sqrt{f}$
石墨	0.01×10^7	$0.16 / \sqrt{f}$

注: 表中 f 为电磁波的频率。

4.3.6 导体表面上的反射

在实际问题中经常会遇到电磁波由真空或介质入射到导体表面上的情况, 同样应用边值关系可以分析导体表面上电磁波的反射和折射问题。在一般入射角下, 由于导体内电磁波的特点, 计算比较复杂, 垂直入射情况较为简单, 而且已经可以显示出导体反射的特点, 因此这里只讨论垂直入射情况。

设电磁波由真空入射于导体表面, 在界面上产生反射波和透入导体内的折射波。在垂直入射情况下, 电磁场边值关系为

$$E + E' = E'' \quad (4.3.35)$$

$$H - H' = H'' \quad (4.3.36)$$

在真空中 $H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E$, 对于良导体, $H = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1+i) E$ 。

设 $\mu = \mu_0$, 将式 (4.3.36) 中 H 的边值关系用 E 表示如下

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(E - E') = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1+i)E''$$

即

$$E - E' = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)E'' \quad (4.3.37)$$

将式 (4.3.37) 与式 (4.3.35) 联立可以解出

$$\frac{E'}{E} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)} - 1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)}{1 + \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)} \quad (4.3.38)$$

分子分母同乘 $\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$, 可以得到

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1+i - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}} \quad (4.3.39)$$

定义反射系数 R 为反射波能流与入射波能流之比

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 = \frac{\left| 1+i - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \right|^2}{\left| 1+i + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \right|^2} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \right)^2 + 1} \quad (4.3.40)$$

因为 $\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$ 很小, 展开后只保留其一次项, 可得到

$$R \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \quad (4.3.41)$$

由式 (4.3.41) 可见, σ 越大, 即电导率越高, 则反射系数越接近于 1。测量结果证实了该式的正确性。

例如, 对于波长 $\lambda = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}$ 的红外线, 铜在垂直入射时的反射系数为 $R = 1 - 0.016$ 。对于波长较长的微波或无线电波, 反射系数更接近 1, 只有很小一部分电磁能量进入导体内而被吸收, 绝大部分能量被反射出去, 在微波或无线电波情形下, 往往可以把金属近似地视为导体, 其反射系数接近于 1。

【例 4-5】 为屏蔽电磁波, 屏蔽室铜包层的厚度要大于 5 倍趋肤深度, 如果要屏蔽的电磁波的频率范围为 $10 \text{ kHz} \sim 100 \text{ MHz}$, 求铜外包层的厚度 (用 mm 表示)。

解: 对于铜, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, 当 $f = 10^4 \text{ Hz}$ 时

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} = \frac{5.8 \times 10^7}{8.85 \times 10^{-12} \times 2\pi \times 10^4} \gg 1$$

所以铜是良导体, 用穿透深度 $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 计算铜外包层厚度 d

$$d = 5\delta = \frac{5}{\sqrt{\pi \times 10^4 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} \text{ m} = 3.3 \text{ mm}$$

所以铜包层厚度要大于 3.3 mm。随着频率升高, 趋肤深度减小, 3.3 mm 厚度的铜包层对于屏蔽频率范围为 10 kHz ~ 100 MHz 的电磁波是足够的。

【例 4-6】 计算高频下良导体的表面电阻。

解: 由于趋肤效应, 高频下仅在导体表面薄层内有电流通过。取 z 轴指向导体内部的法线方向, 导体内体电流密度为

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}_0(x, y) e^{-\alpha z + i\beta z - i\omega t} \quad (4.3.42)$$

该电流分布于表面附近厚度约 $\frac{1}{\alpha}$ 的薄层内, 我们可以把这薄层内的电流视为面电流分布, 面电流的线密度 α_f 定义为通过单位横截线的电流, 即等于在薄层内把 \mathbf{j} 对 z 积分, 由于深入到导体内部 $z \gg \delta$ 时, \mathbf{j} 的数值已很小, 所以也可把这积分写为由可 $z=0$ 到 $z=\infty$ 积分

$$\alpha_f = \int_0^\infty \mathbf{j} dz \quad (4.3.43)$$

将式 (4.3.42) 代入可得

$$\alpha_f = \sigma \mathbf{E}_0 \int_0^\infty e^{-\alpha z + i\beta z} dz = \frac{\sigma \mathbf{E}_0}{\alpha - i\beta}$$

进一步写成复指数形式为

$$\alpha_f = \frac{\sigma \mathbf{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{i\phi} \quad (4.3.44)$$

式中, $\tan \phi = \frac{\beta}{\alpha}$, \mathbf{E}_0 为表面上的电场值。

导体内的平均损耗功率密度为

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

导体表面单位面积的平均损耗功率密度为

$$P_L = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} \quad (4.3.45)$$

式 (4.3.45) 是把薄层内都视为表面, 体密度对薄层厚度积分为表面单位面积, 此时将整个薄层视为表面, 所以是表面单位面积。

由式 (4.3.44) 可知, 当 $e^{i\phi} = 1$ 时, $\alpha_f = \alpha_{i_0}$ 为面电流峰值。

$$\alpha_{i_0} = \frac{\sigma \mathbf{E}_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

则式 (4.3.45) 为

$$P_L = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha\sigma} \alpha_{f_0}^2$$

对良导体, $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{\delta}$, 则

$$P_L = \frac{1}{2\sigma\delta} \alpha_{f_0}^2 \quad (4.3.46)$$

将式(4.3.46)与直流电阻功率比较, 可见导体在高频下的电阻相当于厚度为 δ 的薄层的直流电阻, 如图4-8所示。单位长度的表面电阻为

$$R = \frac{1}{\sigma\delta} = \rho \frac{1}{\delta}$$

因为 $R = \rho \frac{1}{\delta}$ 与 $R = \rho \frac{l}{s}$ 比较, $s = \delta \cdot 1$, $l = 1$, 即表面

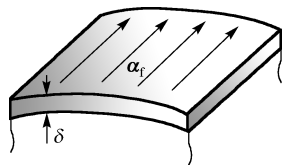


图 4-8 例 4-6 图

单元面积的边为 1, 但有一定的厚度, 厚度为 δ 。

【例 4-7】 一沿 x 方向极化的平面电磁波在海水中传播, 取 z 轴正方向为传播方向。已知海水的相关媒介参数为 $\epsilon_r = 81$ 、 $\mu_r = 1$ 、 $\sigma = 4\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$, 在 $z=0$ 处的电场 $E_x = 100\cos(10^7\pi t)\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 。求:

- (1) 衰减常数、相位常数、相速度、波长及穿透深度;
- (2) 电场强度幅值减小为 $z=0$ 处的 $1/1000$ 时, 波传播的距离;
- (3) $z=0.8\text{m}$ 处的电场 E 的瞬时表达式。

解: (1) 根据题意, 有

$$\omega = 10^7\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{10^7\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 81} = 180 \gg 1$$

此时海水可视为良导体, 故衰减常数为

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{10^7\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2}} \text{m}^{-1} = 8.89 \text{m}^{-1}$$

相位常数

$$\beta = \alpha = 8.89 \text{m}^{-1}$$

相速

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7\pi}{8.89} \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 3.53 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{8.89} \text{m} = 0.707 \text{m}$$

穿透深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89} \text{m} = 0.112 \text{m}$$

(2) 令 $e^{-\alpha z} = 1/1000$, 即 $e^{\alpha z} = 1000$, 由此得到电场强度幅值减小为 $z=0$ 处的 $1/1000$ 时, 波传播的距离为

$$z = \frac{1}{\alpha} \ln 1000 = \frac{3 \times 2.302}{8.89} \text{m} = 0.777 \text{m}$$

(3) 根据题意, 电场的瞬时表达式为

$$E(z, t) = 100e^{-8.89z} \cos(10^7 \pi t - 8.89z) e_x$$

故在 $z = 0.8 \text{m}$ 处, 电场的瞬时表达式为

$$\begin{aligned} E(0.8, t) &= 100e^{-8.89 \times 0.8} \cos(10^7 \pi t - 8.89 \times 0.8) e_x \\ &= 0.082 \cos(10^7 \pi t - 7.11) e_x \end{aligned}$$

由以上计算结果可知, 电磁波在海水中传播时衰减很快, 尤其是在高频时, 衰减更为严重, 这给潜艇之间的通信带来了很大的困难。若要保持低衰减, 工作频率必须很低, 但即使是在 1kHz 的低频下, 衰减仍然很明显。

4.4 电磁波在等离子体中的传播

等离子体是由自由电子、离子和中性粒子组成的电离气体, 其中, 自由电子和离子所带的正、负总电量相等, 对外呈电中性, 在自然界中, 闪电、极光、电离层及绝大部分宇宙星体都是等离子体。在实验室中研究等离子体是从气体放电开始的。此外, 火箭喷出的废气、氢弹爆炸时周围的气体等也都是等离子体, 等离子体是宇宙中普遍存在的物质第四形态。

当电磁波在等离子体中传播时, 带电粒子受到洛伦兹力的作用。由于离子的质量比电子的质量大得多, 在高频外场作用下, 可近似地认为它们是不动的。以 N 表示等离子体每单位体积中的自由电子的数目, \mathbf{v} 表示在外电场作用下电子的运动速度, 热运动忽略不计, 故在外场作用下, 在等离子体中产生的传导电流密度为

$$\mathbf{j} = Nev \quad (4.4.1)$$

对于平面单色电磁波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.4.2)$$

由于 $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$, 当电子运动的速度 $v \ll c$ 时, 磁力可以忽略不计, 故

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx e\mathbf{E} \quad (4.4.3)$$

电子运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} \quad (4.4.4)$$

将式 (4.4.2) 代入, 并对 t 积分可得

$$\mathbf{v} = \frac{ie}{m\omega} \mathbf{E} \quad (4.4.5)$$

故传导电流密度为

$$\mathbf{j} = Nev = i \frac{Ne^2}{m\omega} \mathbf{E} \quad (4.4.6)$$

相应可得电导率为

$$\sigma = i \frac{Ne^2}{m\omega} \quad (4.4.7)$$

在等离子体中，电磁波传播的基本方程为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

其中 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ， $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 。因为讨论的是单色电磁波，故有

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i \frac{Ne^2}{m\omega} \mathbf{E} - i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} = -i\omega \left(1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \right) \varepsilon_0 \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

其中等效电容率为

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \left(1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \right) \varepsilon_0 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \varepsilon_0 \quad (4.4.9)$$

令 $\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \right)^{1/2}$ 称为等离子体角频率，电离层中 N 的典型值是 10^{12} m^{-3} ，所对应的频率

$$f_p = 8.98 \sqrt{N} \approx 9 \text{ MHz} \quad (4.4.10)$$

折射率为

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (4.4.11)$$

当电磁波的频率 $f > f_p$ 时， n 是实数， $n < 1$ ，等离子体是比真空还稀疏的介质，这是等离子体的一个重要特点。此时电磁波在电离层中不衰减，说明高于等离子体频率的电磁波可以顺利穿过电离层，因此，卫星发射中心指挥宇宙飞行时，所用的电磁波的频率要高于 300MHz。

而当 $f < f_p$ 时， n 是虚数，电磁波不能在等离子体中传播而被反射回来，阿普勒登 (Appleton) 和哈特里 (Hartee) 分别提出了电磁波在电离层中传播的理论。他们导出了电离层的折射公式，说明当电磁波频率低于等离子体频率时，将被地球上空的电离层反射回地面，短波通信就是靠电离层反射进行的，一般其频率取小于 30MHz。

4.5 电磁波在波导管内的传播

4.5.1 有界空间的电磁波

前面讨论了单色平面电磁波在无限区域内的传播，包括真空、介质和导体，以及在不同介质界面上的反射和折射。本节将研究电磁波在有界空间的传播。

由前面几节可知, 电磁波主要是在导体以外的空间或绝缘介质内传播的, 只有很小部分电磁能量透入导体表层内, 在理想导体 (电导率 $\sigma \rightarrow \infty$) 的极限情况下, 电磁波全部被导体反射, 进入导体的穿透深度趋于零, 因此导体表面自然构成电磁波存在的边界。在现代通信技术中, 要求电磁波按照一定的路线传输, 这就需要用传输线来引导电磁波, 使电磁波沿传输线的方向传播, 传输线都是用良导体制成的, 在传输线中传播的电磁波是有界空间中传播的电磁波, 典型的例证是波导管和谐振腔。波导管是中空的金属管, 内部是真空或均匀介质, 电磁波在其内空间传播, 在微波技术中, 常用它来传输能量。谐振腔是中空的金属腔, 电磁波以某些特定的频率振荡, 在高频技术中, 常用谐振腔来产生一定频率的电磁振荡。这类有界空间中的电磁波的传播属于边值问题, 在这类问题中, 导体表面边界条件起着重要作用, 因此下面先对导体界面边界条件做一般讨论。

4.5.2 理想导体的边界条件

实际导体虽然不是理想导体, 但是像银和铜等金属导体, 对无线电波来说, 透入其内而损耗的电磁能量一般很小, 接近于理想导体。因此分析实际问题时, 在第一级近似下, 可以先把金属视为理想导体, 求出电磁场分布后, 在第二级近似下, 再考虑有限导电率引起的焦耳热损耗。

对一定频率的电磁波, 两种不同介质 (包括导体) 界面上的边值关系可以归结为:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

当下标 1 代表理想导体, 下标 2 代表真空或绝缘介质时, \mathbf{n} 为由 1 (导体) 指向 2 (介质) 的法线, 理想导体内部没有电磁场。因为理想导体 $\sigma \rightarrow \infty$, $\mathbf{E}_1 = 0$ 是显然的。若 $\mathbf{E}_1 \neq 0$, 则必然出现无穷大的电流, 这与事实不符。当 $\mathbf{E}_1 = 0$ 时, 由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 可知, 如果存在磁场 \mathbf{B} , 它必然不依赖于时间, 一旦有了磁场 \mathbf{B} , \mathbf{B} 永远不为零, 导体内部电荷在磁场 \mathbf{B} 内做 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的运动而发生辐射, 这也与实际不符。因此, 理想导体内部 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0$ 。略去下标 2, 以 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 表示介质一侧处的电场和磁场, 边值关系变为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.5.2a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha} \quad (4.5.2b)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \sigma \quad (4.5.2c)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.5.2d)$$

由于在边界处, \mathbf{E} 的切向分量连续, 而 $E_{1t} = 0$, 所以介质一侧的电场在导体表面处一定和导体垂直。在边界处 \mathbf{B} 的法向分量连续, 而 $B_{1n} = 0$, 所以介质一侧的磁场在导体表面处一定和导体平行。

因此, 在理想导体表面, 电场线与界面正交, 磁感应线与界面相切, 能流密度沿其表面传播。真正制约电磁波存在形式的边值关系为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.5.2a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.5.2d)$$

式(4.5.2b)和式(4.5.2c)反映介质中的电磁场与导体表面上面电荷和面电流的相互关系。

根据以上的讨论,对于以理想导体为边界的有界空间的电磁波来说,亥姆霍兹方程的解,加上条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$,再加上边值关系式(4.5.2),就得到该边值问题的解,即该问题中可能存在电磁波模。

实际求解时,先看方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$,对边界电场的限制往往是重要的,在边界面上,若取 x 轴、 y 轴在切面上, z 轴沿法线方向,由于 \mathbf{E} 沿切向连续,则 $E_x = E_y = 0$ 。因此方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 在边界上为 $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$,也即边界处

$$E = E_n, \quad \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \quad (4.5.3)$$

【例 4-8】 证明两平行无穷大导体平面之间,可以传播一种偏振的 TEM 电磁波。

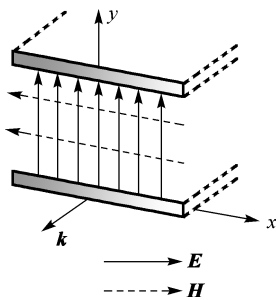


图 4-9 例 4-8 图

解:如图 4-9 所示,设两导体板与 y 轴垂直,由式(4.5.2a)和式(4.5.2d),边界条件为
在两导体平面上

$$E_x = E_z = 0, \quad H_y = 0$$

若沿 z 轴的电磁波的电场沿 y 轴方向偏振,则此平面波满足导体平面上边界条件,因此可以在导体之间传播。另一种偏振的平面电磁波(\mathbf{E} 与导体面相切),不满足边界条件,因而不能在导体平面之间传播,所以在两导体平面之间只能传播一种偏振的 TEM 平面波。

4.5.3 矩形波导中的电磁波

常用的波导管的横截面有矩形和圆形两种,本节只介绍矩形波导。

选一直角坐标系,如图 4-10 所示,取波导内壁面为 $x=0$ 和 a , $y=0$ 和 b , z 轴沿传播方向。在一定的频率下,管内电磁波是亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (4.5.4)$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

满足条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 的解,此解在管壁上还需满足边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 。由于电磁波沿 z 轴方向传播,它应有传播因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$,因此把电场 \mathbf{E} 取为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) e^{ik_z z} \quad (4.5.5)$$

代入亥姆霍兹方程式(4.5.4)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathbf{E}(x, y) + (k^2 - k_z^2) \mathbf{E}(x, y) = 0 \quad (4.5.6)$$

用直角坐标系的分离变量法求解。

设 $U(x, y)$ 为电磁场的某一直角分量,再令 $U(x, y) = X(x)Y(y)$,则式(4.5.6)可分解为两个方程

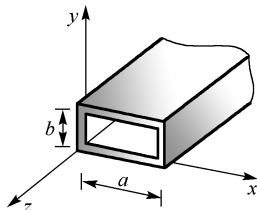


图 4-10 矩形波导管示意图

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) &= 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) &= 0\end{aligned}\quad (4.5.7)$$

式中

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (4.5.8)$$

这样 $U(x, y)$ 的特解为

$$U(x, y) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y) \quad (4.5.9)$$

式中, C_1 、 D_1 、 C_2 、 D_2 为待定系数。

考虑边界条件和理想导体的情况

(1) 当 $x=0$ 和 a 时

$$E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

(2) 当 $y=0$ 和 b 时

$$E_x = 0, \quad E_z = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

由于 $U(x, y)$ 为 \mathbf{E} 的任一直角分量, 所以 E_x 、 E_y 、 E_z 皆满足 $U(x, y)$ 的特解, 再由边界条件, 依次确定系数。对于 E_x 应满足当 $y=0$ 时, $E_x=0$; 当 $x=0$ 时, $\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$ 。

将 $y=0$ 代入可得

$$U(x, y) = C_2 (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x) = 0$$

上式为零, 则有 $C_2=0$ 。

将 $x=0$ 代入

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = D_1 k_x (C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y) = 0$$

上式为零, 则有 $D_1=0$, 所以

$$E_x = C_1 D_2 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}$$

再令 $A_1 = C_1 D_2$, 则有

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}$$

同理可得 E_y 、 E_z , 电场 \mathbf{E} 的三个分量表示为

$$\begin{aligned}E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}\end{aligned}\quad (4.5.10)$$

式 (4.5.10) 表示沿 z 方向是行波, 沿横截面方向是驻波。

再考虑 $x=a$ 时, $E_y=0$, $E_z=0$, $\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$ 。

$y=b$ 时, $E_x=0$, $E_z=0$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$ 。

则式 (4.5.10) 中 k_x 和 k_y 应满足

$$k_x = \frac{m}{a}\pi, \quad k_y = \frac{n}{b}\pi \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.5.11)$$

m 、 n 各代表沿波导横截面的长边和短边上驻波的半波数。

在波导管中任意一点都应满足

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

则有

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0 \quad (4.5.12)$$

因此, A_1 、 A_2 和 A_3 中只有两个是独立的, 对每一组 (m, n) 值有两种独立波模。 \mathbf{E} 的解得出以后, 磁场由下式得到

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (4.5.13)$$

由式 (4.5.12), 如果取 $A_3=0$ ($E_z=0$), 则

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{k_y}{k_x}$$

说明此波模的 $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{k_y}{k_x}$ 就完全确定, 此时 A_1 、 A_2 也不是彼此独立的。也即如果选某一种波模具有 $E_z=0$, 则另外一种波模必须有 $E_z \neq 0$ 。由式 (4.5.13) 可知, 对于 $E_z=0$ 的波模, $H_z \neq 0$, 如果 $E_z=0$ 、 $H_z=0$ 同时成立, 波导管中就不存在电磁波了, 由此波导管中有两种基本波模。

(1) $E_z=0$, $H_z \neq 0$, 在传播方向上无电场分量, 称为横电波, 即 TE 波;

(2) $H_z=0$, $E_z \neq 0$, 在传播方向上无磁场分量, 称为横磁波, 即 TM 波。

对应每种波模, m 、 n 值一般都表示每种波模中的一种具体的形式, 分别以 TE_{mn} 、 TM_{mn} 表示, 波导管中的一般电磁波可以是两种波的叠加。

如当 $m=1$, $n=0$ 时, 对横电波则为 TE_{10} 波, 对于 TM 波, 当 $m=0$ 或 $n=0$ 时, 电磁场就不可能存在。这是因为对 TM 波 $E_z \neq 0$, 且 $E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}$, 若 $k_x = \frac{m}{a}\pi$ 、 $k_y = \frac{n}{b}\pi$ 中的 m 或 $n=0$, 则 $E_z=0$, 与 TM 波的性质矛盾。所以, 对横磁波, m 、 n 的最低值都是 1, 则为 TM_{11} 波。

因此, 在波导管中由于腔壁边界条件的限制, 不可能存在自由空间中的横电磁波 (TEM), 即沿 z 轴传播方向, 电磁场一定有纵向分量 E_z 或 H_z 。而只可能存在横电波或横磁波, 横电波有纵向磁场分量, 横磁波有纵向电场分量。这两种波的叠加也是波导管中可能存在的波, 它们在纵向 (传播方向) 上既有电场分量, 也有磁场分量。

4.5.4 截止频率

波导管中传播的电磁波, 不仅波模 (TE 波或 TM 波) 与自由空间中的横电磁波 (TEM 波) 不同, 而且频率也受到限制。式 (4.5.8) 中, k 为波数, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, 它由激发电磁波频率决

定。 k_x 、 k_y 由 $k_x = \frac{m}{a}\pi$ 、 $k_y = \frac{n}{b}\pi$ 决定，它们取决于截面的几何尺寸及波模的 (m, n) 值。

当激发频率降低到 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 时， k_z 为虚数。这时，传播因子 $e^{ik_z z}$ 变为衰减因子，在这种情况下，电磁波就不能沿波导管传播了，变成了沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡，因此，欲使 z 方向有传播的行波， k_z 必须为实数。电磁波能够在波导中传播的最低角频率（以 ω_c 表示）与 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 相对应。

$$\omega_{c, mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (4.5.14)$$

式 (4.5.14) 为 (m, n) 波模可能传播的最低角频率，称为截止频率。相应的波长称为截止波长，也称为临界波长。

$$\lambda_{c, mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2\pi}{\omega_{c, mn}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (4.5.15)$$

在矩形波导管中，当电磁波的工作角频率 $\omega < \omega_{c, mn}$ 或其波长 $\lambda > \lambda_{c, mn}$ 时，则不能在波导管内传播。

在实际的应用中，最常用的波模是 TE_{10} 波，对 TE_{10} 波最低频率为（若 $a > b$ ）

$$f_{c, 10} = \frac{\omega_{c, 10}}{2\pi} = \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (4.5.16)$$

若管内为真空，最低频率为

$$f_{c, 10} = \frac{c}{2a} \quad (4.5.17)$$

相应的截止波长

$$\lambda_{c, 10} = 2a \quad (4.5.18)$$

TE_{10} 波具有最低的截止频率，而其他高次波模的截止频率都比较高。因此在某一频率范围，我们可以选择适当尺寸的波导，使其中只通过 TE_{10} 波。

由于波导管不能做得过大，在厘米波段，波导管应用最广。对 $a = 7\text{ cm}$ 、 $b = 3\text{ cm}$ 的矩形波导，各种波模的截止波长如表 4-7 所示。

表 4-7 矩形波导各种波模的截止波长（单位为 cm）

(m, n)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
$\lambda_{c, mn}$	14	7	4.7	6.0	3.0	5.5	4.6	3.7

若电磁波在真空中的波长为 5 cm ，则在上述波导管内传输 TE_{10} 、 TE_{20} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 这 4 种波模。在实际通信技术中，波导内的电磁波作为传输信号的载波，如果在波导内同时存在几种波模的载波，场的结构很复杂，一般都尽量使用单一波模作为载波。适当选取波的工作频率，可实现一种波模，例如，在上述的波导管中，若选波长范围在 14 cm 与 7 cm 之间，则只有 TE_{10} 波才能在波导内传播。

4.5.5 TE₁₀ 波的电磁场

对 TE₁₀ 波, $m=1$, $n=0$, $k_x = \frac{\pi}{a}$, $k_y=0$, 而 TE 波 $E_z=0$, 则 $A_3=0$ 。由式 (4.5.12) 可得 $A_1=0$, 由波导管中电磁场的解式 (4.5.10) 可得 $E=E_y$, 取 $A_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0$, H_0 是待定常数, 由式 (4.5.10) 可得

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z}$$

再根据式 (4.5.13) 可得磁场

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right) = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{i\mu\omega}{\pi} a H_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \right)$$

所以

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z}$$

由上式可看出, A_2 这样取的好处, 原来待定的 H_0 就是 H_z 的振幅。

同理

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{i}{\mu\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{ik_z}{\pi} a H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \\ H_y &= -\frac{i}{\mu\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

得到 TE₁₀ 波的电磁场为

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{i\mu\omega a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \\ H_x &= -\frac{ik_z}{\pi} a H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \\ H_z &= H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{ik_z z} \\ E_x &= E_z = E_y = 0 \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

式 (4.5.19) 只有一个待定常数, 它是波导内 TE₁₀ 波的 H_z 振幅, 其值由激发功率确定。由式 (4.5.19) 可以看出, 波导内 TE₁₀ 波电磁场分布规律如下。

(1) 电场沿 x 轴以 $\sin \frac{\pi}{a} x$ 变化, 当 $x=0$ 、 a 时, 电场为零; 当 $x = \frac{a}{2}$ 时, 电场是否最大还要看电场沿 z 轴及时间 t 的变化而定。

(2) 磁场有两个分量, H_x 的变化与电场一样。 H_z 随 x 按余弦变化, 与 H_x 有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差。

电磁场分布如图 4-11 (a) 所示。

TE₁₀ 波的平均能流密度为

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \left(\frac{aH_0}{\pi} \right)^2 \mu \omega k_z \sin^2 \frac{\pi}{a} x \mathbf{e}_z \quad (4.5.20)$$

式(4.5.20)说明电磁波能流沿波导轴线 z 方向传播。

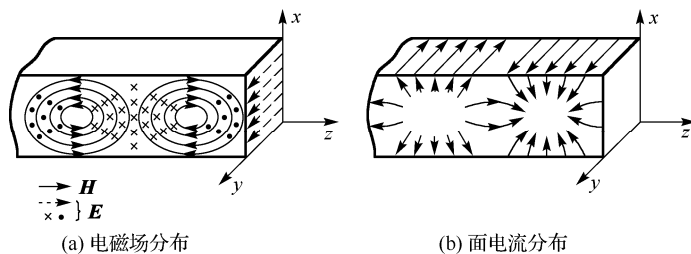


图 4-11 电磁场和面电流分布

由边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha}$ 还可求出波导管壁上的面电流分布。由于讨论管内电磁场，所以法线皆由管内壁指向管内。下面分别求出宽、窄边上的 TE_{10} 波面电流分布。

(1) 宽边上的面电流分布

在 $y=0$ 面上, \mathbf{n} 即 y 方向。

由 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_z = \boldsymbol{\alpha}_x$, $\alpha_x = H_z|_{y=0} = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x$ 。

由 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_x = -\boldsymbol{\alpha}_z$, $\alpha_z = -H_x|_{y=0} = -\frac{ik_z}{\pi} a H_0 \sin \frac{\pi}{a} x$ 。

在 $y=b$ 面上, \mathbf{n} 即 $-y$ 方向。 $\alpha_x = H_z|_{y=b}$, $\alpha_z = H_x|_{y=b}$ 。

(2) 窄边上的面电流分布

在 $x=0$ 面上, \mathbf{n} 即 x 方向。由 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_z = -\boldsymbol{\alpha}_y$, $\alpha_y = -H_z|_{x=0} = -H_0$ 。

在 $x=a$ 面上, \mathbf{n} 即 $-x$ 方向。由 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_z = \boldsymbol{\alpha}_y$, $\alpha_y = H_z|_{x=a} = -H_0$ 。

面电流分布如图 4-11 (b)所示, TE_{10} 波的波导窄边上没有纵向电流, 电流是横过窄边的, 在波导宽边的中线上横向电流为零。由于这些性质, 波导宽边中部的纵向裂缝不会影响 TE_{10} 波的传播, 窄边上的横向裂缝不会影响电磁波在管内的传播。这种裂缝广泛地应用于探针测量波导内的物理量的技术中。

概括起来, 在波导管中传播的电磁波简称为导波, 有以下几个特点:

(1) 波导管内的电磁波是以频率 ω 沿 z 方向传播的行波。但在 xOy 截面上由于边界条件制约而形成驻波。

(2) 波导管内的电磁波或者是 TE 波, 或者是 TM 波, 或者是两种波的叠加, 但不可能是 TEM 波。当 ω 、 a 、 b 给定时, 存在着一系列可能存在的波模, TE_{mn} 、 TM_{mn} , 波模不同, 场的横向分布和传播特性都不同。

(3) 对于确定尺寸的波导管, 每种波模都有它的截止频率, 整个波导管还有一个最低截止频率, 对一定波模的最低截止频率

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

对 TM 波, $m, n=1, 2, \dots$, 对 TE 波, $m, n=0, 1, 2, \dots$, 但 m 、 n 不能同时为零。

相应的截止波长

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

对一定波模, 截止波长仅由波导管尺寸决定。即要求外来电磁波的频率 $\omega > \omega_{c,mn}$, 或它的波长 $\lambda < \lambda_{c,mn}$ 的波在其中通过。它限制了波导管的应用范围, 也给了我们一个方便, 即适当选择几何尺寸, 可使某一频率的波只能以某一个或某几个波模传播, 而其他波模都被截止, 这在技术上是很有用的。

【例 4-9】 对于内壁面为 $x=0, a, y=0, b$ 的矩形波导, 求 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 波的截止频率和截止波长。

解: 矩形波导管, 对应一定波模的最低截止频率和截止波长为

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$TE_{10} \text{ 波 } m=1, n=0, \quad \omega_{c,10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{a}, \quad \lambda_{c,10} = 2a$$

$$TE_{01} \text{ 波 } m=0, n=1, \quad \omega_{c,01} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{1}{b}, \quad \lambda_{c,01} = 2b$$

$$TE_{11} \text{ 波 } m=1, n=1, \quad \omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}, \quad \lambda_{c,11} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

可见, $a = \frac{\lambda_{10}}{2}$ 、 $b = \frac{\lambda_{01}}{2}$ 分别等于 TE_{10} 和 TE_{01} 的半波长。由于 $a > b$, 则 TE_{10} 波具有最低的截止频率, 它是实际应用中最常用的波模。

【例 4-10】 用理想导体制成的一矩形波导管, 管内横截面宽为 a , 高为 b , 管轴与 z 轴平行。证明:

(1) 在波导管内不能传播如下的单色波

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_x, \text{ 式中, } E_0, k_z, \omega \text{ 都是常量}$$

(2) 在管壁处, 磁感强度 \mathbf{B} 的分量满足

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad (x=0, a)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad (y=0, b)$$

证明: (1) 电场行波 $\mathbf{E} = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_x$ 的波相应的磁感应强度

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega} (i\mathbf{k}_z \times \mathbf{E}) = \frac{k_z}{\omega} E_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_y$$

如果上述电磁场是矩形波导管内的电磁波, 则取边界条件应为

$$x=0, a \quad E_y = E_z = 0 \quad B_x = 0$$

$$y=0, b \quad E_x = E_z = 0 \quad B_y = 0$$

由 $y=0, b$ 两个边界面上边界条件得出, 管内电磁场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_y = 0$$

这个结果表明, 波导管内不存在 $\mathbf{E} = E_0 e^{i(k_z z - \omega t)} \mathbf{e}_x$ 电磁波。

(2) 管内沿 z 方向传播的电磁波其形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

代入 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 可得

$$-i \frac{\omega}{c^2} E_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - i k_z B_y \quad (4.5.21)$$

$$-i \frac{\omega}{c^2} E_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = i k_z B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (4.5.22)$$

$$-i \frac{\omega}{c^2} E_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (4.5.23)$$

根据边界条件, $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

在 $x=0, a$ 面上

$$E_y = E_z = 0, \quad B_x = 0 \quad (4.5.24)$$

将式 (4.5.24) 代入式 (4.5.22) 和式 (4.5.23) 可得

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

在 $y=0, b$ 面上

$$E_x = E_z = 0, \quad B_y = 0 \quad (4.5.25)$$

将式 (4.5.25) 代入式 (4.5.22) 和式 (4.5.23) 可得

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad (4.5.26)$$

4.6 谐振腔内的电磁波

在微波波段, 通常采用谐振腔来产生高频振荡, 谐振腔是中空的金属腔, 一个宽为 a 、高为 b 、长为 c 的矩形谐振腔可由一段矩形波导两端用金属板封闭构成, 如图 4-12 所示。通常

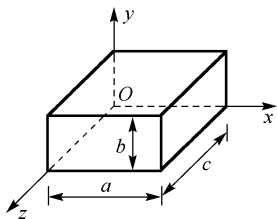


图 4-12 矩形谐振腔

假定两端面是平行的, 且垂直于波导管的轴向 (z 轴)。谐振腔的腔壁是由理想导体制成的, 腔内充满均匀介质, 由于电磁波在两端面上的反射, 与 z 有关的部分也形成了驻波。谐振腔的电磁场分布也是求亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0 \\ k &= \omega \sqrt{\mu\epsilon}\end{aligned}\quad (4.6.1)$$

满足条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 及理想导体边界条件的解。

当腔的形状和大小给定时, 只对 ω 的某些特定的值有解, 这些值称为谐振腔的本征频率。为简单起见, 分析矩形谐振腔内的电磁振荡, 腔内电场和磁场的任一直角分量都满足亥姆霍兹方程式 (4.6.1), 设 $U(x, y, z)$ 为电磁场的某一直角分量。

令 $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, 利用分离变量法求得 U 的驻波解

$$U(x, y, z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$$

代入 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=0$ 面上的边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 及条件 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 可得电场的三个分量

$$\begin{aligned}E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z\end{aligned}\quad (4.6.2)$$

再考虑 $x=a$ 、 $y=b$ 、 $z=c$ 面上的边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 得

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k_z = \frac{l\pi}{c} \quad (m, n, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.6.3)$$

由式 (4.6.2) 可见, m 、 n 、 l 中不能两个同时为零, 若有两个同时为零, 则电场 $\mathbf{E} = 0$, 三者分别代表沿矩形三边所含的半波数。三个任意常数 A_1 、 A_2 、 A_3 , 由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 满足

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0 \quad (4.6.4)$$

因此, A_1 、 A_2 、 A_3 只有两个是独立的。当满足式 (4.6.3) 和式 (4.6.4) 时, 式 (4.6.2) 代表谐振腔内的一种波模, 或称为腔内电磁场的一种本征振荡。

每一组 (m, n, l) 有两个独立的偏振波模。由式 (4.6.1) 和式 (4.6.3) 可得到谐振频率

$$\omega_{mnl} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2} \quad (4.6.5)$$

ω_{mnl} 称为本征频率。可见对一定谐振波模, 本征频率由谐振腔的尺寸决定。一定的谐振腔的大小, 对应于无数多个波模, a 、 b 、 c 一定, m 、 n 、 l 可取 $0, 1, 2, \dots$, 对于同一谐振频率, 可以有一个以上的波模。

若 $a \geq b \geq c$, 最低频率的谐振波模为 $(1, 1, 0)$, 其谐振频率为

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (4.6.6)$$

相应的电磁波波长为

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \quad (4.6.7)$$

式(4.6.7)的波长与谐振腔的线度为同一数量级, 在微波技术中, 通常用谐振腔的最低波模来产生特定频率的电磁振荡。

4.7 相速度和群速度

在讨论波动时, 一定要注意区分相速度和群速度这两个物理量。相速度是相位的传播速度, 群速度是能量的传播速度。

4.7.1 相速度

设在理想的绝缘介质中的平面电磁波, 振动相位为 $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, \mathbf{k} 沿等相面的法线方向, 沿 \mathbf{k} 方向, 等相面随时间变化的关系, 即等相面方程为

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (4.7.1)$$

由此式可得等相面的法向移动速度, 即相速度, 以 v_p 表示。

对式(4.7.1)取全微分

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dr = -\omega dt + k dr$$

此式为零的条件要求

$$v_p = \frac{dr}{dt} \bigg|_{d\phi=0} = \frac{\omega}{k} \quad (4.7.2)$$

而 $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$, 则

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (4.7.3)$$

可见, 相速度 v_p 就是平面电磁波的传播速度, 它与介质性质有关。

在真空中

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (4.7.4)$$

在导体中, 等相面方程为 $\beta \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{常数}$, 则

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.7.5)$$

若导电介质是不良导体

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (4.7.6)$$

此时与一般介质的 v_p 相同。

若导电介质是良导体

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma\mu\omega}, \quad v_p = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}} \quad (4.7.7)$$

此时 v_p 与 ω 有关, 不同频率电磁波的 v_p 不同, 有色散现象。

4.7.2 群速度

单色平面波是一种理想情况, 实际上电磁波总是在某一频率 ω_0 附近有一定展宽 ($\pm\Delta\omega$) 的非周期性波包, 频率不同的一系列平面波叠加而成为波包, 设有许多频率相差很小的波组成一个波包, 其角频率和波数可近似为

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \Delta\omega \\ k(\omega) &= k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \Delta\omega = k + \Delta k \end{aligned}$$

为简单起见, 设电磁波沿 z 方向传播, $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ 表示沿 z 方向传播的单色平面波。由傅里叶分析可将合成波表示为

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int E_0 e^{i(kz - \omega t)} d\omega \\ &= \int E_0(\omega) e^{i(\Delta kz - \Delta\omega t)} d\omega e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \\ &= A(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

式中, $A(z, t) = \int E_0(\omega) e^{i(\Delta kz - \Delta\omega t)} d\omega$ 是合成波的振幅, 它也是以波的形式沿 z 方向传播的。当振幅 $A(z, t)$ 为某一常数时, 它的传播速度为

$$\begin{aligned} v_g &= \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{A \text{ 为常数}} \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \\ v_g &= \frac{dz}{dt} = - \frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{\frac{\partial A}{\partial z}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \end{aligned}$$

在极限情况下, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, 则有

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.7.9)$$

v_g 称为群速度, 是合成振幅在空间的传播速度, 也是能量的传播速度。群速度反映了波包在空间移动的快慢, 相速度反映了波包相位的变化情况。

$$\omega = v_p k$$

$$v_g = v_p + k \frac{dv_p}{dk} \quad (4.7.10)$$

如果 $\frac{dv_p}{dk}$ 为零, 即相速度 v_p 与角频率 ω 或波数 k 无关, 群速度与相速度相等。理想的绝缘介质中的单色平面波, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}n$, 若介质是非色散的, 折射率 n 一定是常数, 与 ω 无关。于是得

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} \quad v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (4.7.11)$$

即真空与非色散介质中的群速度 v_g 与相速度 v_p 无差别。

若介质是色散的, n 与 ω 有关, 由式 (4.7.10) 可得

$$v_g = \frac{c}{n} + k \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{n} \right) \quad (4.7.12)$$

此时, 群速度 v_g 与相速度 v_p 不相等。可见, 只要出现两个以上波的叠加, 就会有群速度和相速度之分。

下面讨论矩形波导中电磁波的相速度与群速度。

(1) 相速度

为简单起见, 设波导中介质为真空, 此时 $k_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$, ω_c 为截止角频率。波沿着 z 方向传播, 相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} > c \quad (4.7.13)$$

因此, 波导中相速度大于真空中的光速, 而它与频率有关。

(2) 群速度

实际上, 波导中传播的不是单色波, 是驻波与行波的叠加。群速度为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c^2 k_z}{\omega} = \frac{c \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega} < c \quad (4.7.14)$$

可见, $v_g < c$ 且 $v_g v_p = c^2$ 。

由相速度 v_p 与群速度 v_g 的定义看出, v_p 是相位的传播速度, 而相位并不对应任何的物理实在, 故此传播速度可大于真空中的光速 c 。而 v_g 是电磁场能量的传播速度, 因而它必须小于真空中的光速 c 。

4.8 左手材料的奇异电磁特性

4.8.1 左手材料的概念

左手材料 (Left-Handed Metamaterials, LHM) 是一种电容率和磁导率同时为负的人工复合结构材料, 由前苏联理论物理学家 Veselago^① 于 1968 年提出。左手材料的发现被美国《Science》杂志评为 2003 年度十大科技突破之一, 2006 年, 基于左手材料思想设计的梯度超

^① G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of permittivity and permeability", *Soviet Physics Uspekhi*, 1968. **10**: 509-514.

介质实现电磁波隐身又被美国《Science》杂志评为年度十大科技突破之一。左手材料的研究是当前物理与电磁学研究领域中的前沿与热点问题。

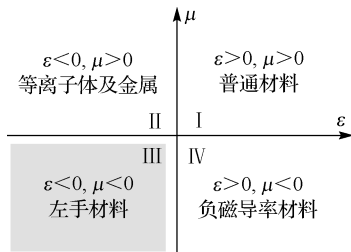


图 4-13 电容率 ε 和磁导率 μ 的象限图

电磁波在介质中传播时,介质的电磁性质可以用电容率 ε 和磁导率 μ 两个宏观参数来描述。根据 ε 和 μ 符号的不同,可以将材料分为 4 种不同类型(如图 4-13 所示)。自然界中,绝大多数材料位于第 I 象限。等离子体和金属低于其等离子体频率时,位于第 II 象限,铁氧体在其铁磁谐振频率附近位于第 IV 象限,根据式 (4.2.13),它们的折射率为虚数,

电磁波不能在其中传播,该材料内传播的电磁波为倏逝波。第 III 象限中, $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$, 其折射率为实数,这种材料在自然界中无法找到,只能通过人工设计,如同象限 I 内的材料一样,电磁波能在其中传播,但会表现出奇异的电磁波传播行为,这种电容率 ε 和磁导率 μ 同时为负的人工周期性结构材料称为左手材料。具有负折射效应、反常多普勒效应、反常切伦科夫辐射、完美透镜、电磁隐身等奇异物理现象。

平面单色波在各向同性线性介质中传播时,满足的麦克斯韦方程组及介质方程为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (4.8.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

将 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 和 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 代入式 (4.8.1), 可得

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (4.8.2)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.8.3)$$

由式 (4.8.3) 可见, 当 ε 和 μ 同时大于零时, 电磁波的波矢 \mathbf{k} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 三者构成右手关系; 而当 ε 和 μ 同时为负时, 三矢量构成左手关系, 如图 4-14 所示, 所以称为左手材料。左手材料中的波矢 \mathbf{k} 与坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向相反, 即相速度和群速度方向相反。

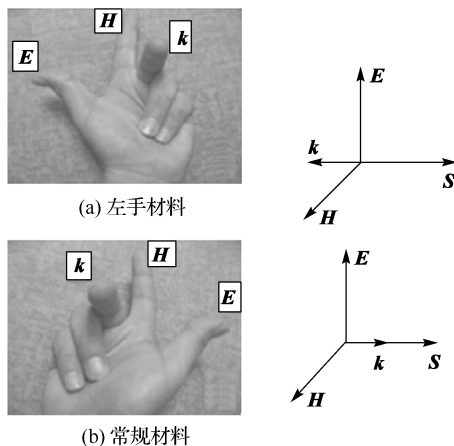


图 4-14 电场、磁场、波矢量方向的关系

4.8.2 左手材料的奇异电磁性质

1. 负折射效应

假设一束平面单色波入射到两种介质界面，在二者界面处会发生反射和折射现象，如图 4-15 所示。由麦克斯韦方程及在介质界面上电磁波矢量满足的连续性边界条件，即光波的电场矢量、磁场矢量在界面切线方向连续，而电位移矢量 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，磁感应强度 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 在界面法线方向连续。设 \mathbf{E} 垂直于入射面。

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t} \quad (4.8.4)$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (4.8.5)$$

根据 4.2 节推导方法，由式 (4.8.4) 和式 (4.8.5) 可解出折射光线的解析表达式。其折射现象满足折射定律

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta''$$

对于正常材料 ($\varepsilon > 0$, $\mu > 0$)，反射光线和折射光线位于界面法线两侧，且反射角等于入射角；入射光线和折射光线分别位于界面法线两侧，且折射角与入射角满足折射定律。该现象称为“正折射”。

若介质 1 为正常材料，而介质 2 为左手材料，即 $\varepsilon_2 < 0$ 和 $\mu_2 < 0$ ，则由边界条件式 (4.8.5) 可见，电场矢量和磁场矢量的切向分量保持不变，而法向分量的符号发生了改变。因此，相对于 $\varepsilon > 0$ 、 $\mu > 0$ 情况下的电磁场，当把 ε 和 μ 同时改为负号时，电场、磁场将按以下的关系变换

$$(E_x, E_y, E_z) \rightarrow (E_x, E_y, -E_z) \quad (4.8.6)$$

$$(H_x, H_y, H_z) \rightarrow (H_x, H_y, -H_z) \quad (4.8.7)$$

由式 (4.8.6) 和式 (4.8.7) 可得，能流密度 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的方向会发生偏转，即图 4-15 中的光线 3。根据平面电磁波性质

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (4.8.8)$$

当 $\mu < 0$ 时，波矢 \mathbf{k} 与能流密度 \mathbf{S} 的方向相反，即沿着光线 3 的反方向。此时折射光线与入射光线位于界面法线同侧，相当于折射角为负值，称为“负折射”。折射角大小仍由折射定律确定，若将折射率取为负值，那么折射定律仍然成立，因此，左手材料也被称为负折射率材料。

2. 反常多普勒效应

正常介质中，波源和观察者如果发生相对移动，即两者相向而行，观察者接收到的频率会升高，反之会降低，这就是著名的多普勒 (Doppler) 效应。但左手材料内传播的波的相速度和群速度方向相反，如果二者相向而行，观察者接收到的频率会降低，反之则会升高，从而出现反常多普勒效应，如图 4-16 所示。类比声波在空气中的传播，一列火车迎面开来的时候会听到笛声逐渐变尖，而远离而去的时候音调就会逐渐降低。但在左手材料中正好相反，因为能量传播的方向和相位传播的方向正好相反，所以如果二者相向而行，观察者接收到的频率会降低，反之则会升高。

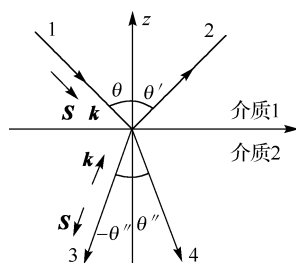


图 4-15 界面处折射示意图

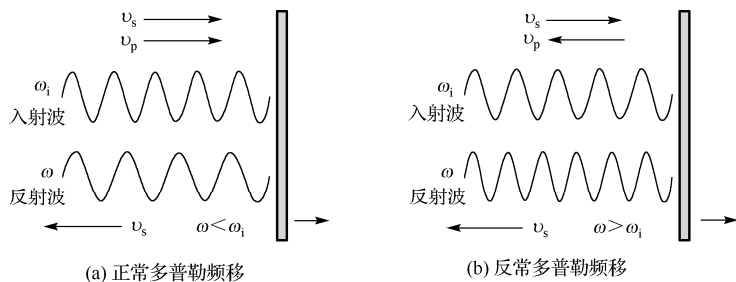


图 4-16 多普勒效应示意图

3. 反常古斯-汉森位移

当光波在两种正常介质的分界面处发生全反射时, 反射光束在界面上存在横向的侧位移, 称为古斯-汉森 (Goos-Hänchen) 位移。位移大小仅与这两种介质的相对折射率及入射光波方向有关。引起古斯-汉森位移的原因是电磁波并非由界面直接反射, 而是在深入介质 2 的同时逐渐被反射, 其平均反射面位于介质 2 表面内侧。

在左手手材料构成的界面处发生古斯-汉森位移与两个普通材料界面处所发生的古斯-汉森位移偏移方向相反, 将之称为反古斯-汉森位移 (如图 4-17 所示)。从相位的角度来说, 这是由于左手材料中的相速度反向所造成的。

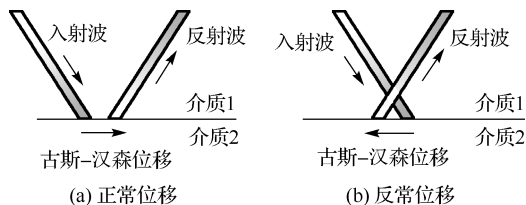


图 4-17 古斯-汉森位移

4. 反常切伦科夫辐射

带电粒子在介质中匀速运动时会在其周围引起诱导电流, 从而在其路径上形成一系列次波源, 分别发出次波。当粒子速度超过介质中光速时, 这些次波互相干涉, 从而辐射出电磁场, 称为切伦科夫 (Cerenkov) 辐射。普通材料中, 次波干涉后形成的波前, 即等相面是一个锥面。电磁波能量沿此锥面的法线方向辐射出去, 是向前辐射的, 形成一个向后的锥角; 即能量辐射的方向与粒子运动方向夹角 θ , θ 由下式确定:

$$\cos \theta = \frac{c}{nv} \quad (4.8.9)$$

式中, v 是粒子运动的速度。

而在左手材料中, 能量的传播方向与相速相反, 因而辐射将背向粒子的运动方向发出, 辐射方向形成一个向前的锥角, 如图 4-18 (b) 所示, 称为反常切伦科夫辐射。

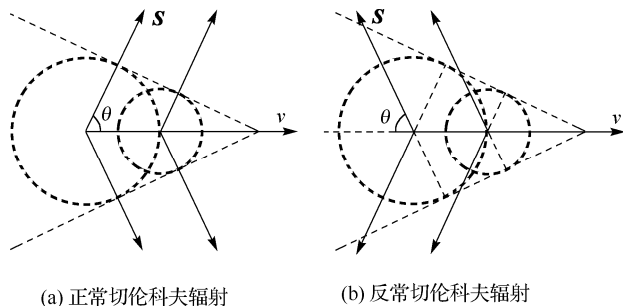


图 4-18 切伦科夫辐射

5. 完美透镜效应

对于传统的光学透镜成像，假设光源 S 是以固有频率 ω 振动的电偶极子，透镜的光轴沿 z 方向，则其辐射场的电场分量的傅里叶级数展开式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m, k_x, k_y} \mathbf{E}_m(k_x, k_y) e^{i(k_z z + k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (4.8.10)$$

代入麦克斯韦方程，即可得

$$k_z = \sqrt{\omega^2 c^{-2} - k_x^2 - k_y^2} \quad (4.8.11)$$

由式(4.8.11)可见，当 $\omega^2 c^{-2} > k_x^2 + k_y^2$ 时， k_z 为实数，对应的场为传播波，而当 $\omega^2 c^{-2} < k_x^2 + k_y^2$ 时， $k_z = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 c^{-2}}$ 为虚数，对应的场为沿 z 方向指数衰减的倏逝波。光学中，当光由光密介质进入光疏介质时，在介质界面处可能会发生全反射，光波沿 z 方向指数衰减导致光波场仅存在于光疏介质中靠近界面附近很薄的介质层内，称为倏逝波或表面波。由于倏逝波衰减速度过快而不能到达成像面参与成像，它所携带的物体信息丢失了。因而物面上的信息受到限制

$$k_x^2 + k_y^2 < \omega^2 c^{-2} \quad (4.8.12)$$

即 $k_{\max} = \omega^2 c^{-2}$ 。因此，普通光学透镜的最大分辨率为

$$\Delta \approx \frac{2\pi}{k_{\max}} = \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda \quad (4.8.13)$$

要突破光学分辨率极限，必须使倏逝波参与成像。因为倏逝波无法穿过普通透镜，这部分光学傅里叶分量所包含的物源信息在中途被丢失，因此透镜不能将光线聚焦到小于光波尺寸的区域，如图 4-19 (a) 和 (b) 所示。而左手材料能够将倏逝波成分放大，能使传播波和倏逝波同时无损地参与成像，如图 4-19 (c) 和 (d) 所示，突破了衍射极限，因而左手材料平板透镜被称为“完美透镜”(Perfect Lens)。

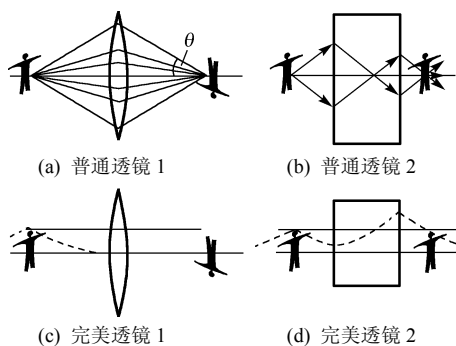


图 4-19 普通透镜与完美透镜成像对比图

6. 电磁隐身斗篷

左手材料后来发展为电磁超材料(Electromagnetic Metamaterial)，可以设计成非均匀媒质，

它的材料属性是由结构单元的电磁谐振特性来体现的,超材料拓宽了材料的等效电容率和磁导率的取值范围,包括正值和负值。结合变换光学的设计思想,将超材料的等效电容率 ε_t 和等效磁导率 μ_t 设定为合适的值,根据折射定律,可以控制电磁波在媒质中按照任意的路线进行传播。例如,当电磁波经过一个球形区域,会发生散射现象。要使所有的电磁波能绕过球形区域,可以在球外的 $R_1 < r' < R_2$ 的球壳区域,设计等效电容率和等效磁导率按如下公式分布

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{r'} &= \mu'_{r'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \frac{(r' - R_1)^2}{r'} \\ \varepsilon'_{\theta'} &= \mu'_{\theta'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \\ \varepsilon'_{\phi'} &= \mu'_{\phi'} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}\end{aligned}\quad (4.8.14)$$

这样就能保证电磁波能绕开该球形区域,平面电磁波通过球壳区域后传播的特性与经过真空后传播的特性一致,如同球形区域不存在一样,达到对电磁波隐身的效果,如图 4-20 所示^①。

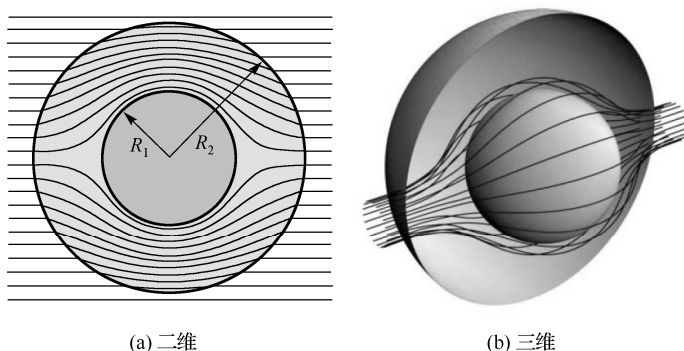


图 4-20 电磁波绕过隐匿区域 R_1 示意图

4.8.3 左手材料的制备

1. 负有效磁导率

Pendry 设计了一种能产生磁响应的微结构单元——金属开口谐振环 (Split Resonant Rings, SRRs) 来实现负磁导率^②。SRRs 是由两个同心且具有开口的金属环构成的。当时谐磁场垂直于 SRRs 时,由法拉第电磁感应定律可知在 SRRs 内产生了感应电流,从而引入了电感。由于内外环之间存在一个间隙,从而产生了电容。于是产生了与 SRRs 的几何尺寸和形状相关的 LC 谐振。在内外环分别引入开口是为了使电磁波在远大于 SRRs 的几何尺寸的波长处发生谐振,内外环的开口位置方向相反增加了 SRRs 的电容,从而降低了其谐振频率。周期性排列 SRRs 阵列如图 4-21 所示,有效磁导率可表示为

^① J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, "Controlling Electromagnetic Fields", *Science*, 2006. **312**: 1780-1782.

^② J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins et al., "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1999. **47**: 2075-2084.

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma'} \quad (4.8.15)$$

式中, ω_0 为 SRRs 的谐振频率, $F = \pi r^2 / a^2$ 确定了负磁导率的频带宽度, $\Gamma' = 2l\rho / (r\mu_0)$ 为损耗参数, a 为结构单元尺寸, ρ 为沿 SRRs 周长方向单位长度的电阻。由式(4.8.15)可见, 当 $\omega_0 < \omega < \omega_b$ 时, $\mu < 0$, 其中 $\omega_b = \omega_0 / \sqrt{1-F}$ 。电磁波不能在该波段传播, 即出现了禁带, 在此禁带范围内, 磁导率为负。

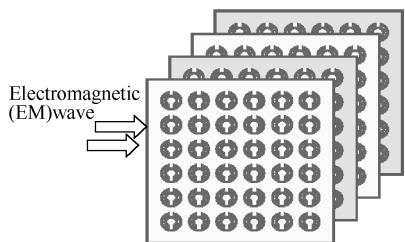


图 4-21 周期排列的开口谐振环结构

2. 负有效电容率

Pendry 提出了一种获得负电容率材料的方法^①, 他发现周期性排列的导电金属线对电磁波的响应与等离子体对电磁波的响应行为相似。等离子体是由大量接近自由运动的带电粒子所组成的体系, 在整体上呈电中性, 其等效电容率为

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.8.16)$$

式中, ω_p 为等离子体频率。当 $\omega < \omega_p$ 时, 其等效电容率小于零。而金属的等离子体频率为

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_{\text{eff}}} \quad (4.8.17)$$

式中, n_e 为电子数密度, e 为电子电量, m_{eff} 为电子有效质量, ε_0 为真空电容率。通常金属的等离子体频率 ω_p 在紫外光波段, 因而金属在稍低于其等离子体频率 ω_p 处的光学频段具有负电容率。而周期性排列的金属线阵列如图 4-22 所示, 可实现微波段负电容率。Pendry 理论研究表明, 周期性排列的金属线阵列的等离子体频率可表示为

$$\omega_p^2 = \frac{2\pi c_0^2}{a^2 \ln(a/r)} \quad (4.8.18)$$

式中, r 为金属线半径, 其值很小, a 为晶格常数, c_0 为真空中光速。周期性排列的金属线阵列的有效电容率可表示为

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma} \quad (4.8.19)$$

式中, ω_0 为谐振频率, 取决于材料的几何结构参数, Γ 为结构的损耗参数。由式(4.8.19)可见, 当 $\omega_0 < \omega < \omega_p$ 时, 该结构中不存在传播模, 在此频率段内出现禁带, 即其等效电容率为负。

3. 人工合成微波段左手材料

依据 Pendry 的设计思想分别实现了负电容率和负磁导率, 如果将金属 SRRs 和金属线视为组成左手材料的结构单元, 按一定周期性组合起来, 理论上就可以实现左手材料。史密斯(Smith)等采用电路板刻蚀技术在玻璃纤维基板的两面分别刻蚀金属铜 SRRs 和金属铜线, 并将

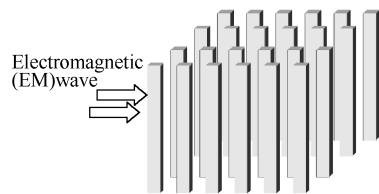


图 4-22 周期排列的金属线阵列

^① J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart et al., "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures", *Physical Review Letters*, 1996. 76: 4773.

其一一对应且按一定的周期排列成结构材料,首次实现了微波段左手材料,如图 4-23 所示^①。实验首次验证了这种结构材料对微波具有负折射的性质。后来,研究者们设计了各种各样形状的周期排列材料。



图 4-23 左手材料样品示意图

4. 光频段左手材料的制备

物理刻蚀方法: Yen 等人采用光刻蚀技术 (Photoproliferated Process) 加工制备了结构单元为 $30\mu\text{m}$ 左右的铜 SRRs 阵列,实现了 1.0THz 附近的磁响应,而且磁响应强度比自然磁性材料大一个数量级。Zhang 等采用金属介电多层膜蒸发沉积及光刻蚀技术制备了周期性排列的金 U 形环,实现了中红外 100THz ($5\mu\text{m}$) 磁响应,并理论上预言了近红外 230THz ($1.3\mu\text{m}$) 的磁响应。U 形环的面积和其两个脚的尺寸及 ZnS 层的厚度确定了该结构的等效电感和电容。

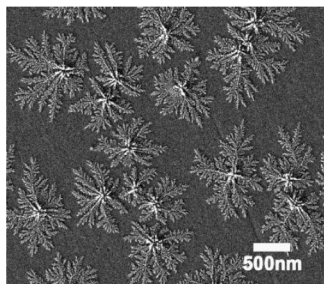


图 4-24 样品的扫描电镜照片

化学制备方法: 最近,纳米树枝状结构在人工合成电磁超材料方面也显现出其特点,西北工业大学赵晓鹏小组设计了树枝状结构超材料。并利用化学电沉积法,直接在 ITO 导电玻璃基底上沉积银树枝状结构(如图 4-24 所示)^②,实验观察在红外波段具有很强的透射通带,并且在对应的频率表现出明显平板聚焦效应。这是首次利用化学方法制备的左手材料。

4.8.4 左手材料的应用展望

基于左手材料的奇异的电磁波特性具有潜在的应用前景,微波段左手材料可广泛应用于微波器件,如微波平板聚焦透镜、带通滤波器、调制器、微型反向天线、基于传输线左手材料的前向波方向耦合器、宽带相移器、分布式放大器、磁共振成像设备等。

红外波段左手材料可应用于生物安全成像、生物分子指纹识别、遥感、可视度极低的天气条件下的导航、微型谐振腔、可调谐透镜、隔离器等。

利用左手材料能突破衍射极限的原理,可见波段左手材料可以制备成超灵敏单分子探测器,用来探测微量污染、极微量危险性生物化学药剂,以及血液中表征早期疾病的蛋白质分子和医学领域诊断成像等。利用其负折射和倏逝波放大特性,可以用以制作集成光路中的光

^① R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction", *Science*, 2001. **292**: 77-79.

^② H. Liu, X. P. Zhao, Y. Yang et al., "Fabrication of infrared left-handed metamaterials via double template-assisted electrochemical deposition", *Advanced Materials*, 2008. **20**: 2050.

引导元件,有望制作出分辨率比常规光学透镜高几百倍的扁平光学透镜,也有望解决高密度近场光存储遇到的光学分辨率极限问题,可能制作出存储容量比现有 DVD 高几个数量级的新型光学存储系统。反常切伦科夫辐射效应可用于探测高能带电粒子。

由于电磁波和声波都是一种物质波,满足类似的波动方程,所以对电磁波奇异调控的左手材料也可以推广至对声波奇异调控的声学超材料 (Acoustic Metamaterials)。在声学领域中,人工设计的声学超材料两个基本宏观参数——动态质量密度和动态弹性模量可以为负值,通过调控这两个基本参数,可以实现对声波的平板聚焦、亚波长成像、声学隐身等奇异效应。声学超材料的这些奇异性可以应用于超声医学成像、舰艇隐身等。

左手材料的提出改变了人们对传统材料的认识,并开创了一个全新的领域,其独特的电磁特性引起了许多科学家的兴趣,随着左手材料在微波段及红外可见光波段的研究发展,左手材料在科技进步和材料应用上必将发挥出其巨大的潜在能量。

习 题

- 4.1 判断下列说法是否正确。对正确的进行论证,对错误的举例说明它为什么是错的。
 - (1) 电磁波一定是横波 (TEM 波);
 - (2) 电磁波的电场矢量和磁场矢量一定正交;
 - (3) 电磁波中的电场能量一定等于磁场能量;
 - (4) 两种电磁波的频率相同,它们的波长也一定相同。
- 4.2 试从麦克斯韦方程推导出自由空间中的电磁波波动方程。
- 4.3 试证明真空中的平面电磁波满足下列性质:
 - (1) 横波 (TEM 波);
 - (2) \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{k} 组成右手系;
 - (3) $\sqrt{\epsilon_0}\mathbf{E} = \sqrt{\mu_0}\mathbf{H}$ 。
- 4.4 已知在绝缘介质中传播的平面电磁波的电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$, 求能量密度和能流密度的平均值。
- 4.5 在 $\epsilon_r \epsilon_0$ 、 μ_0 介质中电场 $\mathbf{E} = E_0 e^{-i2k_0 z} \mathbf{e}_x$, $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, $\omega = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ 。求介质的相对电容率 ϵ_r 、等相位面、波长 λ 、相速度 v_p 、波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$ 及磁场 \mathbf{H} 。
- 4.6 一平面电磁波以入射角 $\theta = 30^\circ$ 从真空入射到玻璃 ($\epsilon_r = 1.6$, $\mu_r = 1$)
 - (1) 写出反射波和折射波的波矢量;
 - (2) 设入射波的 $\mathbf{E}_\perp = -E_\perp \mathbf{e}_y$, $\mathbf{E}_\parallel = -E_\parallel \cos \theta \mathbf{e}_x + E_\parallel \sin \theta \mathbf{e}_z$, 波矢量为 \mathbf{k} , 试根据菲涅耳公式, 作图标出 E'_\perp 、 E'_\parallel 及 E''_\perp 、 E''_\parallel 的方向。
- 4.7 一平面电磁波以 $\theta = 45^\circ$ 从真空入射到 $\epsilon_r = 2$ 的介质, 电场强度垂直于入射面, 求反射系数和折射系数。
- 4.8 试证明在迅变场中, 当电磁波频率不太高时, 导体中自由电荷只能存在于导体表面上。
- 4.9 求解下列问题:
 - (1) 真空中波长为 1 cm 的平面电磁波垂直地入射到一块铝制厚板上, 求此波的穿透深度。已知铝的电导率为 $3.4 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ 。
 - (2) 设冰的电导率很小, $\sigma = 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\epsilon = 3.2 \epsilon_0$, 求频率在兆赫范围内的穿透深度。
- 4.10 空气中, 平面电磁波电场强度 $E_0 = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, 频率 $f = 3 \times 10^8 \text{ Hz}$ 。今有一厚铜板 (铜电导率

- $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$) 垂直传播方向, 求铜板内表面处的电场强度 \boldsymbol{E} 、磁感强度 \boldsymbol{B} 、电流密度 \boldsymbol{j} 、衰减长度 d , 以及距离表面处 10^{-4} m 的电流密度 \boldsymbol{j} 。
- 4.11 海水的电容率 $\varepsilon \approx 80\varepsilon_0$, 电导率 $\sigma = 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu \approx \mu_0$ 。当 $\sigma/(\omega\varepsilon) > 10$ 时, 可以把海水视为良导体。求:
- (1) 可把海水视为良导体时的最高工作频率 f_0 ;
 - (2) $f_1 = 10^4 \text{ Hz}$, $f_2 = 10^8 \text{ Hz}$ 时, 电磁波的衰减长度 d_1 、 d_2 。
- 4.12 平面电磁波垂直入射到金属表面上, 试证明: 透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热。
- 4.13 一矩形波导的尺寸为 $a = 7 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, 电磁波在真空中的波长为 $\lambda = 5 \text{ cm}$, 当它进入此波导时, 可能传播哪些类型的电磁波?
- 4.14 论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 波。
- 4.15 工作于 x 波段的矩形波导宽边为 $a = 23 \text{ mm}$, 窄边为 $b = 10 \text{ mm}$, 求工作波长 $\lambda = 3.2 \text{ mm}$ 时 TE_{10} 模的波导波长 λ_g 。
- 4.16 在尺寸为 $a \times b = 22.86 \text{ mm} \times 10.16 \text{ mm}$ 的矩形波导中, 传输 TE_{10} 模, 工作频率为 10 GHz 。
- (1) 求截止波长 λ_c 、波导波长 λ_g 和阻抗 $Z_{\text{TE}_{10}}$;
 - (2) 若波导宽边尺寸增大一倍, 上述参数如何变化? 还能传输什么模式?
 - (3) 若波导窄边尺寸增大一倍, 上述参数如何变化? 还能传输什么模式?
- 4.17 矩形空腔谐振器 $a = 2.3 \text{ cm}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 2.2 \text{ cm}$, 主模是 TE_{101} 模, 即 $m = 1$ 、 $n = 0$ 、 $l = 1$, 求矩形谐振器的谐振波长 λ_c 。

第5章 电磁波的辐射

第4章讨论了在各种情况下电磁波在空间的传播性质。但是电磁波是怎样发射出来的呢？在实践上，电磁波常常是由运动电荷辐射出来的，例如，无线电波是由发射天线上的高频交变电流辐射出来的。

本章的主要内容：研究给定变化的电流分布或变化的电荷分布，如何计算它们所辐射的电磁场。

讲授思路：首先把势的概念推广到一般变化电磁场的情况，引入电磁场的矢势和标势；然后将麦克斯韦方程组写成矢势和标势所满足的微分方程，求解微分方程，得到推迟势；最后以推迟势为基础，讨论小区域（线度远小于波长）内电荷和电流分布的辐射问题，其中电偶极辐射是一种最基本的辐射。

5.1 电磁场的矢势和标势

5.1.1 用势描述电磁场

在静电场和静磁场问题中，引入矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 可使求场的问题简化。在随时间变化的电磁场下，是否还可以引入与时间有关的矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 呢？如果可以引入，它们与电磁场的关系如何？本节将这种方法推广到随时间变化的普遍情况，将会看到引入标势和矢势来描述电磁场的运动，同样可使求解电磁场的问题简化。

为简单起见，我们讨论真空中的电磁场。真空中电磁场的规律由麦克斯韦方程组式(3.2.6)描述。

在恒定磁场中，由于 \mathbf{B} 的无源性，即 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，引入矢势 \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

在一般的变化情况下，仍保持 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，即由式(3.2.6d)可以看出， \mathbf{B} 与矢势 \mathbf{A} 的关系是普遍成立的，则有

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1.1)$$

式中， \mathbf{A} 是电磁场的矢势。

在静电场中，由电荷激发的电场是无旋的，即 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，引入标势 φ

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (5.1.2)$$

但在一般的变化情况下，由式(3.2.6b)可以看出，电场 \mathbf{E} 的特性与静电场不同，它可以是无旋场与有旋场的叠加。电场 \mathbf{E} 一方面受到电荷的激发，另一方面也受到变化磁场的激发。后者所激发的电场是有旋的，此时不能简单地写成 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 。由于在变化情况下，电场与磁场发生直接联系，电场的表示式必然包含矢势 \mathbf{A} 在内。

将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 中, 得到

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.1.3)$$

这意味着此时矢量 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 仍然是无旋的, 因此它可以用标量函数 φ 来描述, φ 称为电磁场的标势。则有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (5.1.4)$$

因此, 一般情况下电场用势表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.1.5)$$

由以上讨论, 对一般随时间变化的电磁场, 仍可引入矢势与标势, 并通过式 (5.1.1) 与式 (5.1.5) 表示, 但现在电场 \mathbf{E} 不再是保守力场, 一般不存在势能的概念, 标势 φ 失去作为电场中电势的意义。因此在高频系统中, 电压的概念也失去确切的意义。在变化场中, 磁场和电场是相互影响着的整体, 必须把矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 作为一个整体来描述电磁场。

5.1.2 规范变换和规范不变性

由式 (5.1.1) 可以看出, \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 不是一一对应的, 矢势 \mathbf{A} 的选取有很大的不确定性。可以相差一个任意标量函数的梯度, 也就是说

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

矢势 \mathbf{A}' 与 \mathbf{A} 对应着同一个磁场 \mathbf{B} 。

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (5.1.6)$$

这种变换称为规范变换。

在式 (5.1.6) 的规范变换下, 磁场 \mathbf{B} 是不变的。但是这个 $\nabla \psi$ 在式 (5.1.5) 中对 \mathbf{E} 要产生影响。

$$\mathbf{E}' = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \psi) = -\nabla \left(\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

可见, \mathbf{A} 中多了一项, 应从 φ 中减去。为了保证电场 \mathbf{E} 也不变, 标势 φ 必须同时做如下变换

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.1.7)$$

这里要特别注意: ψ 是坐标与时间的任意标量函数, 在这种变化下

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= -\nabla \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \end{aligned}$$

即 (\mathbf{A}', φ') 与 (\mathbf{A}, φ) 描述同一个电磁场

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

式(5.1.8)称为电磁场势的规范变换。

由于电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 是可观测的物理量, 而用势描述电磁场时, 又可彼此相差规范变换, 但均对应着同一电磁场。当势做规范变换时, 所有的电磁场量和相关的物理规律都应该保持不变, 这种不变性称为电磁场的规范不变性。即自然界的物理量与物理规律, 凡涉及电磁作用时, 都具有规范不变性。规范变换和规范不变性最先在电磁场理论中引入, 后来在现代理论物理中有了进一步发展, 凡是场的运动方程具有规范不变性的就称为规范场。传递一切相互作用的场都是规范场, 电磁场传递电磁相互作用是人们首先认识的规范场。

从数学上来说, 规范变换自由度的存在是由于在电磁场势的定义式(5.1.1)与式(5.1.5)中只给出 \mathbf{A} 的旋度, 而没给出 \mathbf{A} 的散度, 仅由矢量场的旋度是不足以确定矢量场的。为了确定 \mathbf{A} , 还必须给出 \mathbf{A} 的散度, 电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 本身对 \mathbf{A} 的散度没有任何的限制, 因此, 作为确定势的辅助条件, 可以取 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为任意的值, 每种选择都对应一种规范。采用适当的辅助条件, 可以使基本方程和计算简化, 而且物理定义也较明显, 在不同问题中, 可以采用不同的规范条件。应用最广的是以下两种规范条件。

(1) 库仑规范

在第2章静磁场中已采用过这种规范, 规范条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.1.9)$$

在这种规范中, \mathbf{A} 为无源场, 因而电场表达式(5.1.5)中第二项 $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是无源场, 是由变化磁场激发的有旋电场。而第一项 $-\nabla \varphi$ 是无旋场, 是由电荷激发的有源场。

(2) 洛伦兹规范

在这种规范中, 规范条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5.1.10)$$

下面将这两种规范分别代入矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 满足的基本方程, 可以看到不同的规范各有其特点。当采用洛伦兹规范时, 势的基本方程化为简单的对称形式, 因此, 这种规范在理论研究及解决实际辐射问题时是很方便的。

5.1.3 达朗贝尔方程

现在由麦克斯韦方程组导出矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 满足的基本方程。

将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 代入麦克斯韦方程组式(3.2.6a)和式(3.2.6c)可得

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \\ -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

应用 $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ 对两式加以整理得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (5.1.11)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.1.12)$$

这是真空中矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 所满足的基本方程。原来 4 个方程减少为 2 个方程，但是它仍是耦合方程组。解这样的耦合方程组必须联立求解，有时是相当繁杂的，如果采用规范条件可将方程大大简化。

(1) 若采用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，方程 (5.1.11) 和方程 (5.1.12) 变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (5.1.13)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (5.1.14)$$

可以看出，采用这种规范的特点是标势 φ 所满足的方程与静电场情形相同，仍满足泊松方程。它的解为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi\varepsilon_0 R} dV' \quad (5.1.15)$$

其中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ，解出标势 φ 后，代入式 (5.1.13)，可以解出矢势 \mathbf{A} ，因此可以确定辐射电磁场。

(2) 若采用洛伦兹规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ，在这种规范下 \mathbf{A} 和 φ 的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (5.1.16)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.1.17)$$

可见采用这种规范， \mathbf{A} 和 φ 的方程化为一对不耦合的非齐次波动方程。一个是矢势 \mathbf{A} 的方程，一个是标势 φ 的方程，它们具有相同的形式，其自由项分别为电流密度 \mathbf{j} 和电荷密度 ρ 。由方程可见，电荷产生标势的波动，电流产生矢势的波动。离开电荷、电流分布区域后，矢势和标势都以波动形式在空间传播。由它们导出的电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 也以波动的形式在空间传播。把满足洛伦兹规范的矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 称为洛伦兹规范下的 \mathbf{A} 和 φ 。把洛伦兹规范下 \mathbf{A} 和 φ 满足的微分方程式 (5.1.16) 和式 (5.1.17) 称为达朗贝尔方程。

如果电磁场不随时间变化，即 $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ ， $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ ，式 (5.1.16) 与式 (5.1.17) 变为 \mathbf{A} 和 φ 所满足的泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (5.1.18)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.1.19)$$

在这种情况下, 退回到静电场与静磁场的情况。因此, 达朗贝尔方程 (5.1.16) 和方程 (5.1.17) 是普遍情况下的电磁场势满足的方程。

由以上推导可见, 从麦克斯韦方程组可以得到电磁场势的微分方程, 即达朗贝尔方程。它们对于 4 个势函数 φ 、 A_x 、 A_y 、 A_z 的数学形式相同。一旦这些势方程有解, 电磁场就可以根据式 (5.1.1) 和式 (5.1.5) 解出。因此, 达朗贝尔方程和麦克斯韦方程组是等效的, 实际上是电磁场运动规律的另一种表现形式, 这种形式简单而对称, 易于掌握。但是要强调一点, 并不是所有达朗贝尔方程的解都相应于满足麦克斯韦方程组的电磁场, 而是其中同时满足洛伦兹规范的解才是电磁场的势。

【例 5-1】 求平面电磁波的矢势和标势。

解: 平面电磁波在没有电荷、电流分布的空间传播, 势方程变为齐次波动方程

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

其平面波的解为

$$A = A_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (5.1.20)$$

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (5.1.21)$$

(1) 若 A 和 φ 满足洛伦兹规范 $\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\nabla \cdot A = i k \cdot A_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} = i k \cdot A$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i \frac{1}{c^2} \omega \varphi_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} = -i \frac{\omega}{c^2} \varphi$$

则有

$$i k \cdot A_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} = i \frac{\omega}{c^2} \varphi_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

消去共同因子, 可得

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{\omega} k \cdot A_0 \quad (5.1.22)$$

因此, 只要给定矢量 A_0 , 就可以确定平面电磁波, 场矢量 E 和 B 可以表示为

$$B = \nabla \times A = i k \times A$$

$$E = -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = -i k \varphi + i \omega A$$

$$= -i k \left[\frac{c^2}{\omega} (k \cdot A) \right] + i \omega A$$

$$= -i \frac{c^2}{\omega} [k(k \cdot A) - k^2 A]$$

$$= -i \frac{c^2}{\omega} [k \times (k \times A)]$$

真空中 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$

$$\mathbf{E} = -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -c \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{B}$$

即

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -c \mathbf{e}_k \times \mathbf{B} \\ \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} &= -c \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{B}) = -c [\mathbf{e}_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}] = c \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

由平面电磁波的势得到的以上结果与第 4 章平面电磁波的结果一致。

还需要说明一点, 由 $\mathbf{E} = -i \frac{c^2}{\omega} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{A})]$ 可知:

若 $\mathbf{k} \times \mathbf{A} = 0$, 说明 \mathbf{A} 矢量平行于 \mathbf{k} 矢量, 此时 $\mathbf{E} = 0$, 平行于 \mathbf{k} 方向的分量称为纵向分量;

若 $\mathbf{k} \times \mathbf{A} \neq 0$, 说明 \mathbf{A} 矢量有与 \mathbf{k} 矢量垂直的分量, 此时 $\mathbf{E} \neq 0$, 一般把垂直于 \mathbf{k} 方向的分量称为横向分量。

可见, 平面波电磁场只依赖于矢势 \mathbf{A} 的横向矢量, 对 \mathbf{A}_0 加上任意纵向部分 $\alpha \mathbf{k}$ (同时对 φ_0 加上 $\alpha \omega$, α 为任意常数), 都不影响电磁场的强度, 即

$$\begin{aligned}\varphi_0 + \alpha \omega &= \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{A}_0 + \alpha \mathbf{k}) \\ &= \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{c^2}{\omega} \alpha k^2 \\ &= \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 + \alpha \frac{c^2}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 + \alpha \omega = \varphi_0 + \alpha \omega\end{aligned}$$

这说明在平面电磁波的情况下, 即使加上洛伦兹规范后, \mathbf{A} 和 φ 仍然不是确定的, 还剩下一些规范变换自由度。最简单的选择是取 \mathbf{A} 只有横向分量, 即 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$, 由 $\varphi = \frac{c^2}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})$ 可知, $\varphi = 0$ 。在这种情况下

$$\mathbf{B} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = i \omega \mathbf{A} \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (5.1.23)$$

(2) 若采用库仑规范, 矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 的方程 (5.1.16) 和方程 (5.1.17) 在自由空间中 ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) 变为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \varphi &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0\end{aligned}$$

当自由空间没有电荷分布时, 库仑场的标势 $\varphi = 0$, 把 $\varphi = 0$ 代入以上第一个方程, 得到 \mathbf{A} 的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

其平面波的解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 保证了 \mathbf{A} 只有横向分量, 即 $\varphi = 0$ 。

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = i\omega \mathbf{A} \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0)$$

与洛伦兹规范下取 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$ 的情况结果一致。

由该例可以看出, 库仑规范的优点在于它的标势 φ 描述库仑作用, 直接由电荷分布 ρ 求出, 它的矢势只有横向分量。刚好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振。辐射电磁波的电场永远与传播方向(辐射方向)垂直, 即与波矢量 \mathbf{k} 垂直, 库仑规范又称为辐射规范。

采用洛伦兹规范, 矢势 \mathbf{A} 的纵向部分与标势 φ 的选择还可以有任意性, 但洛伦兹规范的特点是它使矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 的方程具有对称性, 在相对论中显示出协变性, 因而以后都采用洛伦兹规范。

5.2 推迟势

5.2.1 达朗贝尔方程的解

本节来求达朗贝尔方程的解, 可以看出, 达朗贝尔方程中

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

\mathbf{A} 和 φ 所满足的方程形式完全一样。先考虑标势 φ 满足的方程, 这个非齐次线性方程的解是该方程的特解再加上该方程所对应的齐次方程的通解, 以下寻求这个特解。

由于方程是线性的, 反映了场的叠加性, 将整个空间分为许多无限小的区域, 先求其中某一体积元的变化电荷所产生的势, 然后再对整个空间取积分, 即得总标势。

假如选择坐标原点在所考虑的体积元内, 原点处有一变化电荷 $Q(t)$, 其电荷密度是 $\rho(\mathbf{r}, t) = Q(t)\delta(\mathbf{r})$, 此电荷产生的标势 φ 满足的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (5.2.1)$$

先考虑 $\mathbf{r} \neq 0$ 的空间内上述方程的解, 然后再由这个解去推测包含 $\mathbf{r} = 0$ 这一点时解的形式, 因此除原点外, 电荷产生的标势 φ 满足的方程为齐次波动方程。

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq 0) \quad (5.2.2)$$

由球对称性, φ 具有中心对称性, φ 只依赖于 r 、 t , 而不依赖于角变量 θ 、 ϕ , 即 φ 只是 r 和 t 的函数。在球坐标系中, 式 (5.2.2) 化为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (r \neq 0) \quad (5.2.3)$$

考虑到当 r 增大时, φ 减小, 做如下代换

$$\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r} \quad (5.2.4)$$

将式 (5.2.4) 代入式 (5.2.3) 得到 u 的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.2.5)$$

这是一维空间的波动方程, 其通解为

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad (5.2.6)$$

式中, f 和 g 是两个任意函数, 由式 (5.2.4) 和式 (5.2.6) 可得除原点以外 φ 的解为

$$\varphi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (5.2.7)$$

式中, 第一项代表向外发射的球面波, 第二项代表向内收敛的球面波, 函数 f 和 g 的具体形式应由物理条件定出。在研究辐射问题时, 电磁场是由原点处的电荷发出的, 它必然是向外辐射的波。因此在辐射问题中取 $g = 0$ 。除原点外, φ 应有下列形式

$$\varphi(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (5.2.8)$$

再讨论原点的情形。式 (5.2.8) 中 f 的形式暂且是任意的, 应由原点处的电荷变化形式决定。换句话说, 必须这样来选择 f , 使式 (5.2.1) 在原点处也能得到满足。注意当 $r \rightarrow 0$ 时, $\varphi \rightarrow \infty$ 。因此, $\varphi(r, t)$ 对坐标的导数比 $\varphi(r, t)$ 对时间的导数增加得快些, 所以当 $r \rightarrow 0$ 时, 同 $\nabla^2 \varphi$ 比较, $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ 可以省去。则式 (5.2.1) 可以写成

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} Q(t) \delta(\mathbf{r}) \quad (5.2.9)$$

式 (5.2.9) 与静电场泊松方程相同, 这就意味着在原点附近, 式 (5.2.8) 应取库仑定律的结果。由此可以推出式 (5.2.1) 的解为

$$\varphi(r, t) = \frac{Q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.2.10)$$

如果电荷不在原点而在 \mathbf{r}' 点上, 则有

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5.2.11)$$

其中 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ，由于场的叠加性，对于一般变化电荷分布， $\rho(\mathbf{r}',t)$ 所激发的标势为

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 R} dV' \quad (5.2.12)$$

由于矢势 \mathbf{A} 所满足的方程形式上与标势 φ 的方程一致，所以一般变化电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)$ 所激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R} dV' \quad (5.2.13)$$

5.2.2 推迟势

以下讨论达朗贝尔方程 (5.1.16) 与方程 (5.1.17) 解的物理意义。

式 (5.2.12) 中， $\varphi(\mathbf{r},t)$ 为一般变化电荷分布 $\rho(\mathbf{r}',t)$ 所激发的标势，式 (5.2.13) 中， $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 为一般变化电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)$ 所激发的矢势。如图

5-1 所示， $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 表示观测点 P ， $\varphi(\mathbf{r},t)$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 分别表示 t 时刻在 P 点的标势 φ 和矢势 \mathbf{A} 值，

$\mathbf{r}'=(x',y',z')$ 表示源点， $\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)$ 和 $\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)$

分别表示 $t'=t-\frac{R}{c}$ 时刻在 \mathbf{r}' 点的电荷密度 ρ 和电

流密度 \mathbf{j} 值， R 表示源点 \mathbf{r}' 与观测点 \mathbf{r} 的距离。

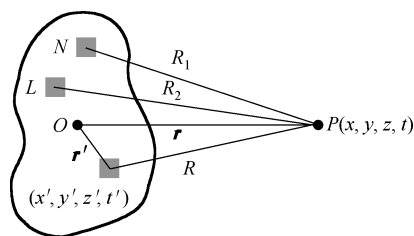


图 5-1 电荷、电流激发标势和矢势的示意图

式 (5.2.12) 说明 t 时刻 \mathbf{r} 点的势 φ 是由全部电荷贡献的。但值得注意的是，电荷密度 $\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)$ 中的时刻并不是 t 时刻，而是一个比 t 早的时刻 $t'=t-\frac{R}{c}$ 。或者说， t' 时刻在 \mathbf{r}' 处电荷产生的场并不能在同一时刻 t' 就到达 \mathbf{r} 点，而是需要一个传输时间 Δt 。它取决于源点离观测点的距离 R 和场的传播速度 c ，所以 $\Delta t=\frac{R}{c}$ 。而 $t=t'+\Delta t$ ，由于 $t>t'$ ，故 t 时刻的标势 φ 和矢势 \mathbf{A} 晚于场源辐射的时刻 t' ，因此称式 (5.2.12) 和式 (5.2.13) 为推迟势。

不同源点如 L 、 N 等对同一场点的距离是不同的，因此 $t'=t-\frac{R}{c}$ 也不同。对 t 时刻 \mathbf{r} 点的标势 φ ，显然源区各点都有贡献，但却不是同一时刻各点的电荷都有贡献。因为 $\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)$ 对源区各点，由于 R 不同，所以 t' 也不同。如图 5-1 所示， N 点的电荷在时刻 $t-\frac{R_1}{c}$ 的值对 $\varphi(\mathbf{r},t)$ 有贡献， L 点的电荷在 $t-\frac{R_2}{c}$ 时刻的值对 $\varphi(\mathbf{r},t)$ 有贡献。在 \mathbf{r} 点 t 时刻测量到的电磁场是由电荷和电流在不同时刻激发的。对式 (5.2.13) 的物理意义可做同样的解释。

推迟势的重要性在于说明空间某点 \mathbf{r} 在某时刻 t 的势不是依赖于同一时刻的电荷和电流

分布,而是决定于较早时刻 $t - \frac{R}{c}$ 的电荷、电流分布。点 \mathbf{r}' 处在 t' 时刻的电荷和电流变化要在 $\frac{R}{c}$ 时间以后才能影响到点 \mathbf{r} 处在 t 时刻的势。由此可见,变化电荷、电流是电磁波的波源, φ 、 \mathbf{A} 反映了电磁波的辐射。电磁作用是以有限速度传播的,在真空中这个速度就是 c 。即电荷、电流产生的物理作用不能瞬时地传到观测点,而是在较晚时刻才传到观测点,所推迟的时间 $\frac{R}{c}$ 正是电磁作用从电荷、电流所在点 \mathbf{r}' 传至观测点 \mathbf{r} 所需要的时间。

【例 5-2】如图 5-2 所示, a 、 b 是电荷分布中的两点,它们离场点的距离分别是 $R_a = 3.00 \times 10^6 \text{ m}$ 、 $R_b = 2.97 \times 10^6 \text{ m}$ 。

问: $t = 8 \text{ s}$, 在 P 点的标势 φ 中, a 、 b 两点贡献的部分是它们各自在什么时候的电荷密度激发的?

解: 对 t 时刻的 φ 有贡献的应该是 t' 时刻的电荷密度 ρ 。

由于 $\varphi(x, y, z, t)$ 与 $\rho(x', y', z', t')$ 相对应。

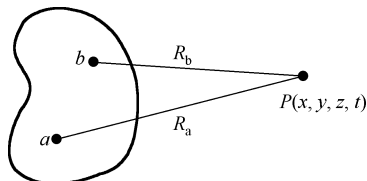


图 5-2 例 5-2 图

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

$$t'_a = t - \frac{R_a}{c} = 8 - \frac{3 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 7.9900 \text{ s}$$

$$t'_b = t - \frac{R_b}{c} = 8 - \frac{2.97 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 7.9901 \text{ s}$$

下面讨论推迟势与静电场、静磁场(恒定场)势的对比关系,如表 5-1 所示。

表 5-1 推迟势和恒定场势的对比关系

	标势	矢势
推迟势	$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'$
恒定场的势	$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV'$

这两种情况下的势在形式上完全一样,只是 ρ 和变量 \mathbf{j} 中不是 t 时刻,而是 $t' = t - \frac{R}{c}$ 时刻。

因为在静电场和静磁场中,电荷和电流是不随时间变化的。在空间 \mathbf{r} 处观测到的场量体现出的是同一时刻 t 的电荷或电流的贡献,而现在电荷和电流是运动的,体现出推迟效应。

关于推迟势还需指出以下几点:

(1) 达朗贝尔方程的解式(5.2.12)是在静电场问题的基础上推广的,它是否确实是方程(5.2.1)的解呢?可将式(5.2.12)代入加以验证,可以证明确实是方程的解。

(2) 由麦克斯韦方程组导出达朗贝尔方程时,引入了洛伦兹规范,因此推迟势还必须满足

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

利用电荷守恒定律可验证推迟势 φ 和 \mathbf{A} 满足洛伦兹规范。证明如下:

设 $t' = t - \frac{R}{c}$, 对 R 的函数而言,有 $\nabla = -\nabla'$, 因此

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V -\nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} \right]_{r' \text{ 不变}} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[-\nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')_{t' \text{ 不变}}}{R} \right] dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')_{t' \text{ 不变}}}{R} dV' \\
\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t') dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{r}', t') dV'
\end{aligned}$$

因而

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} [\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{r}', t')] dV'$$

由电荷守恒定律

$$\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')_{t' \text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t'} \rho(\mathbf{r}', t') = 0$$

所以可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

(3) 当 ρ 、 \mathbf{j} 给定时, 由推迟势可计算出 φ 和 \mathbf{A} , 再由

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
\mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}
\end{aligned}$$

求得空间任意点的电磁场强度。

5.3 电偶极辐射

电磁波是由交变运动的电荷系统辐射出来的, 在宏观状态下, 电磁波由载有交变电流的天线辐射出来, 在微观状态下, 变速运动的带电粒子导致电磁波的辐射。本节研究宏观电荷系统在其线度远小于波长情形下的辐射问题。

5.3.1 计算辐射场的一般公式

当变化电流分布给定时, 计算辐射场的基础是推迟势公式

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad (5.3.1)$$

其中 $t' = t - \frac{R}{c}$ 。若电流 \mathbf{j} 是一定频率的交变电流

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\omega t'} \quad (5.3.2)$$

代入 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 的表达式, 因为 $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\omega t + i\omega\frac{R}{c}} = \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{i(kR - \omega t)}$ 。式中, $k = \frac{\omega}{c}$ 是波数。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{i(kR - \omega t)}}{R} dV' \quad (5.3.3)$$

令

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

则有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{ikR}}{R} dV' \quad (5.3.4)$$

式中, e^{ikR} 是推迟作用因子, 它表示电磁波传至观测点时有相位滞后 kR 。式 (5.3.4) 是讨论电磁波辐射的出发点。

只要电流密度 \mathbf{j} 确定, 电荷密度 ρ 也自然确定。因为 ρ 与 \mathbf{j} 由电荷守恒定律相联系

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

在一定频率交变电流的情况下

$$\rho = \rho_0 e^{-i\omega t} \quad (5.3.5)$$

由电荷守恒定律 $i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{j}$, ρ 确定了, 标势 φ 也可以确定。

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 R} dV'$$

由于标势 φ 和矢势 \mathbf{A} 之间由洛伦兹规范条件相联系, 所以实际计算中求出矢势 \mathbf{A} 就可确定场了。因为知道 \mathbf{A} 用洛伦兹规范条件就可定出 φ 来, 由 \mathbf{A} 和 φ 即可计算电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} , 通常只讨论矢势 \mathbf{A} 。在这种情况下, 由矢势 \mathbf{A} 就可完全确定电磁场。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

算出 \mathbf{B} 后, \mathbf{E} 可由麦克斯韦方程组确定, 在电荷分布区外面 $\mathbf{j} = 0$, 由真空中, 麦克斯韦方程

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 和 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 可得出

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{ik}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= i\frac{c}{k} \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

以上讨论的是计算辐射场的一般公式, 以下仅讨论宏观电荷分布在小区域的情形。

5.3.2 矢势的展开式

在矢势表达式(5.3.4)中,我们注意到存在三个线度:电荷分布区域的线度 l ,它决定积分区内 $|\mathbf{r}'|$ 的大小;波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$;电荷到观测点的距离 R 。本节将研究分布于一个小区域内的电流所产生的辐射,所谓小区域,是指它的线度远小于波长 λ 及观测距离 R ,即

$$l \ll \lambda, \quad l \ll R \quad (5.3.7)$$

至于 R 和 λ 的关系,有三种情况:

- (1) 近区 $R \ll \lambda, (l \ll R \ll \lambda)$
- (2) 感应区 $R \sim \lambda, (l \ll R \sim \lambda)$
- (3) 远区(辐射区) $R \gg \lambda, (l \ll \lambda \ll R)$

一般情况下,变化的电荷和电流产生的磁场是很复杂的。在近区,起主要作用的是似稳场,它不能脱离场源向外运动,而是与场源的瞬时性相对应。在远区,起主要作用的是辐射场,它们脱离场源以波的形式向外运动,这部分就是近代技术上作为通信工具的电磁波。在实际应用中,人们并不关心全部电磁场,只考虑电磁波。三个区域内场的特点是不同的。在近区内, $kR \ll 1$,推迟因子 $e^{ikR} \sim 1$,忽略推迟效应。因而电磁场保持静电场和静磁场的主要特点,电场具有静电场的纵向形式,磁场也和恒定场相似。在远区内,电磁场变为横向辐射场。感应区是一个过渡区,情况比较复杂。实际上通常是在离发射系统较远处接收电磁波的,对这类问题需要计算远场。以下主要讨论远场的势。

在静电场和静磁场问题中,当 $l \ll R$ 时,可用多极矩展开的方法来讨论,现在也可采用这种方法。

选坐标原点在电荷分布区域内,则 $|\mathbf{r}'|$ 的数量级为 l ,以 r 表示由原点到观测点 \mathbf{r} 的距离。 R 为由电荷分布点 \mathbf{r}' 到观测点 \mathbf{r} 的距离。令 $r = |\mathbf{r}|$

$$\begin{aligned} R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \\ &= r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\mathbf{e}_r \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$,计算远场(辐射区)时仅考虑 $\frac{1}{r}$ 项,即只保留 $\frac{1}{r}$ 的最低次项,则

$$R \approx r \left(1 - 2\mathbf{e}_r \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r} \right)^{\frac{1}{2}} = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' \quad (5.3.8)$$

将式(5.3.8)代入式(5.3.4)可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{ik(r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')}}{r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad (5.3.9)$$

由于只保留 $\frac{1}{r}$ 最低项,所以分母中可略去 $-\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'$,但是在相因子中的 $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'$ 是不能忽略的,因

为这项贡献一个相因子

$$e^{-ike_r \cdot r'} = e^{-i2\pi e_r \cdot \frac{r'}{\lambda}}$$

所以这里涉及的是小参数 $\frac{r'}{\lambda}$ ，而不是 $\frac{r}{r}$ ，相位差 $\frac{2\pi e_r \cdot r'}{\lambda}$ 一般是不能忽略的，因此需要保留 $\frac{r'}{\lambda}$ 中的各级项。

$$e^{ike_r \cdot r'} = 1 - ike_r \cdot r' + \dots \quad (5.3.10)$$

将式 (5.3.10) 代入式 (5.3.9) 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') (1 - ike_r \cdot \mathbf{r}' + \dots) dV' \quad (5.3.11)$$

式中， $\frac{e^{ikr}}{r}$ 是球面波形式，这表示矢势在远区的行为是向外传播的球面波。以下会看到展开式中各项对应电磁波的多极辐射。

5.3.3 电偶极辐射

现在研究展开式 (5.3.11) 的第一项

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \quad (5.3.12)$$

先看电流密度体积积分的意义，电流是由运动带电粒子组成的，设单位体积内有 n_i 个带电量为 q_i 、速度为 \mathbf{v}_i 的粒子，则它们对电流密度的贡献为 $n_i q_i \mathbf{v}_i$ ，因此

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

式中，求和号表示对各类带电粒子求和。上式也等于对单位体积内所有带电粒子的 $q\mathbf{v}$ 的求和，因此可得

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \sum q\mathbf{v}$$

式中，求和号表示对区域内所有带电粒子求和。

$$\sum q\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum q\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}}$$

式中， \mathbf{p} 是电荷系统的电偶极矩，因此

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \dot{\mathbf{p}} \quad (5.3.13)$$

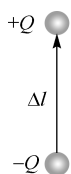


图 5-3 电偶极子系统

图 5-3 所示为一个简单的电偶极子系统，这种模型是赫兹振子，它是历史上第一次用人工方法获得电磁波的电荷系统。它是由两个导体小球构成的，两小球用细导线连接，当导线上有交变电流 I 时，两导体上的电荷 $\pm Q$ 就交替变化，形成一个振荡电偶极子。也就是说， Q 有时为正，有时为负，且其值随时间 t 变化，当两球充以等量异号电荷时，就会发生放电现象。由于电阻很小，所以这种放电属于振荡性

的, 振荡放电实际上是电荷在导线中做加速度运动形成的, 因此在它周围激发起变化的电磁场, 辐射出一系列连续的电磁波。系统的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = Q\Delta\mathbf{l}$$

当导线上有电流 I 时, Q 的变化率为

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

因而体系的电偶极矩变化率为

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} Q\Delta\mathbf{l} = I\Delta\mathbf{l} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \quad (5.3.14)$$

与一般的式 (5.3.13) 相同。

由此可见, 展开式的第一项代表振荡电偶极子产生的辐射

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{e}^{ikr}}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} \quad (5.3.15)$$

以下研究振荡电偶极子周围的电磁场

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu_0 \mathbf{e}^{ikr}}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}$$

由于只保留 $\frac{1}{r}$ 的最低次项, 因而算符 ∇ 无须作用到分母的 r 上, 而仅需要作用到相因子 \mathbf{e}^{ikr} 上, 作用结果相当于做代换

$$\nabla \rightarrow ik\mathbf{e}_r \quad (5.3.16)$$

则

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i\mu_0 k}{4\pi r} \mathbf{e}^{ikr} \mathbf{e}_r \times \dot{\mathbf{p}}$$

设振荡电偶极子做简谐振动

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \mathbf{e}^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -i\omega\mathbf{p}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2\mathbf{p}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{i\mu_0 k}{4\pi r} \mathbf{e}^{ikr} \mathbf{e}_r \times (-i\omega\mathbf{p}) \\ &= \frac{\mu_0 \omega^2 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{4\pi r} \mathbf{e}^{ikr} \mathbf{e}_r \times \mathbf{p} \\ &= \frac{\mathbf{e}^{ikr}}{4\pi \varepsilon_0 c^3 r} \mathbf{e}_r \times \omega^2 \mathbf{p} \\ &= \frac{\mathbf{e}^{ikr}}{4\pi \varepsilon_0 c^3 r} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= i \frac{c}{k} \nabla \times \mathbf{B} = c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r
 \end{aligned}$$

因此得到电偶极子产生的辐射场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B}

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r \\
 \mathbf{E} &= \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r
 \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

若取球坐标原点在电荷分布区内, 并以 \mathbf{p} 方向为极轴, 则由式 (5.3.17) 得到

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} |\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikr} \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\
 \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} |\ddot{\mathbf{p}}| e^{ikr} \sin\theta \mathbf{e}_\theta
 \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

由电偶极辐射电磁场 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 关系式可看出, 电偶极辐射有以下特点。

(1) \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{k} 构成相互垂直的矢量系统。在球坐标系中, \mathbf{E} 在 θ 方向, \mathbf{B} 在 ϕ 方向, \mathbf{k} 矢量沿 \mathbf{e}_r 方向, 如图 5-4 所示。 \mathbf{B} 沿纬线振荡, \mathbf{E} 沿经线振荡。 \mathbf{E} 的方向沿经线方向, 电场线是经面上的闭合曲线。由于在空间 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, \mathbf{E} 线必须闭合但 \mathbf{E} 不可能完全横向, 即 $E_r \neq 0$, 如图 5-5 所示。 \mathbf{B} 沿纬线方向, 磁感应线是围绕极轴的圆周, \mathbf{B} 总是横向的, $H_z = 0$, 因此电偶极辐射是空间中 TM 波。

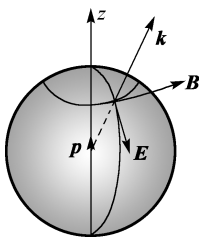


图 5-4 电偶极辐射的电磁场方向

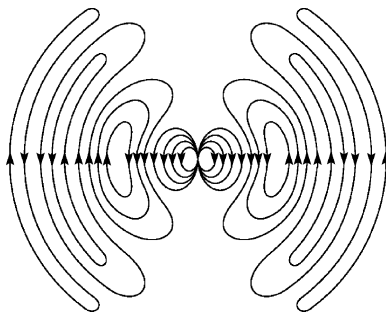


图 5-5 电偶极辐射的电场线分布

(2) 电场和磁场大小关系为

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \right| = c$$

(3) 当 $\theta = 0, \pi$ 时, $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ 。当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 达到最大值, 可见电偶极辐射具有明显的方向性, 即电偶极子沿自己的轴向不辐射, 而在垂直于轴向的平面上具有最大的辐射。

(4) \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 与距振荡源的距离 r 成反比, 与 $|\ddot{\mathbf{p}}|^2$ 成正比。电偶极子产生辐射的条件是 $\ddot{\mathbf{p}} \neq 0$ 。实质上 $\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{l}} = q\dot{\mathbf{v}}$, 而 $\dot{\mathbf{v}}$ 就是加速度。换句话说, 只要电荷运动速度发生变化, 就会产生辐射。

5.3.4 辐射能流、角分布、辐射功率

在辐射问题的实际应用中，最主要的问题是计算辐射功率和辐射的方向性，这些都可以从平均能流密度 $\bar{\mathbf{S}}$ 求出。将电偶极辐射的电磁场代入平均能流密度公式

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{c}{2\mu_0} \operatorname{Re}[(\mathbf{B}^* \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e}_r = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (5.3.19)$$

式中，因子 $\sin^2 \theta$ 表示电偶极辐射的角分布，即辐射的方向性。在振动方向 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的平面上辐射最强，而沿电偶极矩轴线方向（沿振动方向 $\theta = 0$, $\theta = \pi$ ）没有辐射，如图 5-6 所示，辐射能量在空间的角分布称为辐射方向图，也称为波瓣图。

将 $\bar{\mathbf{S}}$ 对球面积分，即得总的辐射功率

$$\begin{aligned}P &= \oint |\bar{\mathbf{S}}| r^2 d\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}\quad (5.3.20)$$

$|\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \omega^4 |\mathbf{p}|^2$ ，则有

$$P = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{|\mathbf{p}|^2 \omega^4}{3c^3}\quad (5.3.21)$$

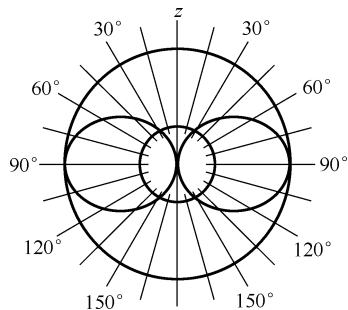


图 5-6 电偶极矩的辐射方向图

可见，若保持电偶极矩振幅不变，辐射功率正比于频率的 4 次方，频率变高时，辐射功率迅速变大。只有在高频情况下，辐射强度才特别显著，这指明了提高频率是增加辐射功率的有效途径，显然对恒定电流情况（ $\omega = 0$ ），不存在电磁场的辐射。

若用波长 λ 表示 $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$

$$P = \frac{4\pi^3 c}{3\varepsilon_0 \lambda^4} |\mathbf{p}|^2\quad (5.3.22)$$

由此可知，短波电台辐射功率比长波电台辐射功率大。

可以看到，辐射功率与可选择的球面半径无关，这表示振荡电偶极子辐射出来的电磁场在真空中不会转化为其他形式的能量，而仍以电磁场能量的形式传播到远方。

5.3.5 短天线的辐射、辐射电阻

由以上的讨论可知，电偶极辐射的关键在于一个辐射系统有电偶极矩，且 $\ddot{\mathbf{p}}(t)$ 不为零。如果对一个电荷或电流分布系统，可以找出等效的电偶极矩，并且算出它的 $|\ddot{\mathbf{p}}|$ ，就可以计算该系统的电偶极辐射。当直天线的长度 l 远小于波长时，它的辐射就是这种电偶极辐射。可以视为

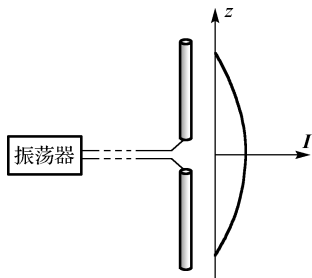


图 5-7 短天线辐射装置

电偶极矩的天线称为短天线，以下讨论短天线辐射。图 5-7 所示为中心馈电长度为 l 的天线，在天线两半段上，电流方向相同。在馈电点 $z=0$ 处，电流有最大值 I_0 ，在天线两端，电流为零。

若天线长度 $l \ll \lambda$ ，则沿天线上的电流分布近似为线性关系

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2}{l} |z| \right), \quad |z| \leq \frac{l}{2} \quad (5.3.23)$$

由式 (5.3.13)，电偶极矩变化率为

$$\dot{p} = \int_{-l/2}^{l/2} I(z) dz = I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \left(1 - \frac{2|z|}{l} \right) dz = \frac{1}{2} I_0 l \quad (5.3.24)$$

由 $\dot{p} = -i\omega p = \frac{1}{2} I_0 l$ ，则有

$$p = \frac{i}{2} \frac{l}{\omega} I_0 \quad (5.3.25)$$

代入辐射功率表达式 (5.3.17)，可求出短天线的辐射功率为

$$P = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{l^2}{\lambda^2} I_0^2 \quad (5.3.26)$$

式 (5.3.26) 适用于 $l \ll \lambda$ 的情形，由此式看出，若保持天线电流 I_0 不变，则短天线的辐射功率正比于 $\left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$ 。

天线不断向外辐射能量，就要不断地消耗自己的能量。如果得不到能量的补充，它的振动就会逐渐衰减，最后归于停止。通常天线向外辐射的电磁能量是由电源供给的，对于电源来说，由于辐射而损耗的能量可等效地视为一个电阻所消耗的，通过等效电阻流入天线输入端的电流在等效电阻 R_r 上耗散的功率恰好等于总的辐射功率。因此，由天线引起的辐射能量损耗通常用一等效电阻 R_r 来描述，这个电阻称为辐射电阻 R_r ，令

$$P = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \quad (5.3.27)$$

由式 (5.3.25)

$$P = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{l^2}{\lambda^2} I_0^2 = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

得到

$$R_r = \frac{2P}{I_0^2} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (l \ll \lambda) \quad (5.3.28)$$

由于 $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$ ，因而

$$R_r = 197 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (5.3.29)$$

天线的辐射电阻越大,表示在一定输入电流下的辐射功率越大。因此,辐射电阻通常是用来表征天线辐射能力的一个量。由于短天线的辐射电阻正比于 $(\frac{l}{\lambda})^2$,因此,短天线的辐射能量是不强的,要提高辐射能力,必须使天线长度增大到最小与波长同量级。但是这种情况下,天线的辐射已不能用电偶极辐射来表示。

【例 5-3】 证明由具有相同荷质比 ($q/m = \text{常数}$) 的粒子所组成的孤立系统,不会有电偶极辐射。

证明: 若系统所有粒子的荷质比都是相同的,则系统的电偶极矩为

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

而 $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{R} \sum_i m_i$, \mathbf{R} 是系统的质量中心的矢径,则

$$\mathbf{p} = \frac{q}{m} \mathbf{R} \sum_i m_i$$

电偶极辐射的电磁场均与 $\ddot{\mathbf{p}}$ 有关

$$\ddot{\mathbf{p}} = \frac{q}{m} \ddot{\mathbf{R}} \sum_i m_i$$

对孤立系统而言,质心加速度 $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, 则 $\ddot{\mathbf{p}} = 0$, 从而辐射场

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = 0$$

即该系统没有电偶极辐射。

【例 5-4】 一电偶极矩大小为 p_0 的电偶极子位于 xOy 平面内的坐标原点,以匀速度 ω 通过其中心的 z 轴旋转。如图 5-8 所示,求它在空间一点 $P(r, \theta, \phi)$ 处所产生的辐射场和能流。

解: p_0 以角速度 ω 转动,可分解为相位差为 $\pi/2$ 的互相垂直的两个线振动,这旋转电偶极子的电偶极矩可写为

$$\mathbf{p} = p_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t}$$

在球坐标系中

$$\mathbf{e}_x = \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_r + \cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_\theta - \sin\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{e}_y = \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_r + \cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_\theta + \cos\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y &= \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi)\mathbf{e}_r + \cos\theta(\cos\phi + i\sin\phi)\mathbf{e}_\theta - (\sin\phi + i\cos\phi)\mathbf{e}_\phi \\ &= e^{i\phi}(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} &= -\omega^2 p_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t} \\ &= -\omega^2 p_0 e^{i(\phi - \omega t)}(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\phi) \end{aligned}$$

旋转电偶极子的辐射场为

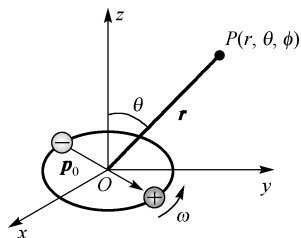


图 5-8 例 5-4 图

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{e}^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{e}^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} [(\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \ddot{\mathbf{p}}] \\
&= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}^{i(kr - \omega t + \phi)} \{ [-(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{i} \mathbf{e}_\phi) \cdot \mathbf{e}_r] \mathbf{e}_r + (\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{i} \mathbf{e}_\phi) \} \\
&= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}^{i(kr - \omega t + \phi)} (\cos\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{i} \mathbf{e}_\phi) \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \mathbf{e}^{i(kr - \omega t + \phi)} (\cos\theta \mathbf{e}_\phi - \mathbf{i} \mathbf{e}_\theta)
\end{aligned}$$

辐射场的平均能流密度为

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^* \times \frac{1}{c} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}) \right] \\
&= \frac{1}{2c\mu_0} \operatorname{Re} [(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_r - (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{E}] \\
&= \frac{1}{2c\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) \mathbf{e}_r
\end{aligned}$$

代入求出的 \mathbf{E} , 可得

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\omega^2 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r$$

【例 5-5】 一天线长为 l , 其上载有电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 式中 I_0 和 ω 都是常数, 如图 5-9 所示。求这天线的辐射场 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 。

解: 以天线中心为原点, 天线为极轴, 取球坐标系。

\mathbf{A} 的推迟势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{I_0 \cos \omega \left(t - \frac{R_z}{c} \right)}{R_z} dz \mathbf{e}_z$$

式中, R_z 为天线上任意一点到场点 P 的距离, r 为场点到原点的距离, 对于辐射场 $r \gg l$, 因此天线 l 上的任意一点 z 到场点 P 的距离 R_z 都可用 r 代替, 即 $R_z \approx r$ 。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e}_z$$

用复数表示

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \mathbf{e}^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_z \\
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \mathbf{e}^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_z \right)
\end{aligned}$$

式中, $k = \frac{\omega}{c}$, 因只取 $1/r$ 项, 故算符 ∇ 对分母上的 r 不作用, 则 $\nabla \rightarrow i k \mathbf{e}_r$,

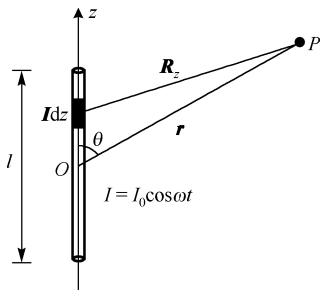


图 5-9 例 5-5 图

$$\mathbf{B} = i k \mathbf{e}_r \times \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_z$$

又因为 $\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta$

$$\mathbf{B} = -\frac{k\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\phi$$

则有

$$\mathbf{E} = -c \mathbf{e}_r \times \mathbf{B} = \frac{ck\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \mathbf{e}_r \times \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{B} = -\frac{k\mu_0 I_0 l}{4\pi r} \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{e}_\phi$$

5.3.6 磁偶极辐射

矢势 \mathbf{A} 多极展开式 (5.3.11) 的第一项为电偶极辐射, 第二项为磁偶极辐射和电四极辐射 (在同一级中出现)。下面仅讨论磁偶极辐射, 关于多极矩的辐射, 不做详细讨论。

计算发现, 磁偶极辐射场与电偶极辐射场的关系为只要将电偶极辐射场做以下代换

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c} \\ \mathbf{E} &\rightarrow c\mathbf{B} \\ c\mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

即得磁偶极辐射场。这样的代换反映了麦克斯韦方程组的电磁对称性。自由空间中麦克斯韦方程组对变换 $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$, $c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ 是对称的。

磁偶极辐射场为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi c^2 r} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_r \\ \mathbf{E} &= -\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi c r} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{e}_r) \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

磁偶极辐射的平均能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{32\pi^2 c^3 r^2} \sin^2\theta \mathbf{e}_r \quad (5.3.32)$$

磁偶极辐射的总辐射功率为

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\mathbf{m}|^2}{12\pi c^3}$$

【例 5-6】 一电流线圈半径为 a , 激发电流振幅为 I_0 , 角频率为 ω , 求辐射功率。

解: 将电流线圈的磁矩振幅 $m = I_0 \pi a^2$ 代入辐射功率公式

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 (I_0 \pi a^2)^2}{12\pi c^3} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2$$

当电流 I_0 和线圈面积不变时

$$P \propto \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

当开放型短天线（电偶极辐射）的线度 l 与闭合型磁偶极天线的线度 a 为同一数量级时

$$\frac{P_m}{P_e} \propto \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

对于偶极辐射，天线线度与波长 λ 之间的关系为 $l \ll \lambda$, $a \ll \lambda$ ，则有

$$\frac{P_m}{P_e} \propto \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \ll 1$$

因此，在短天线与磁偶极子天线中馈入相同频率和振幅的振荡电流时，即使天线线度相同量级（ $a \sim l$ ），磁偶极辐射比电偶极辐射小，即小线圈的辐射能力比短天线更低。

5.4 电磁场的动量

电磁场不仅有能量，也具有动量，这是电磁场物质性的具体体现。带电体和电磁场之间不仅有能量交换，也有动量交换。在交换过程中，遵守两个守恒定律——能量守恒定律和动量守恒定律。研究电磁场动量的方法和讨论电磁场能量的情况类似，即研究一个带电体系受电磁场作用时，其动量发生变化，由总体系（带电体系和电磁场）的动量守恒而求出电磁场的动量。

有一带电体系在电磁场中运动，所受的洛伦兹力密度为

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (5.4.1)$$

电荷系统受力作用后，它的动量发生变化，由动量守恒定律，电磁场的动量也应该相应改变，则带电体系的动量 \mathbf{G} 变化率为

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \quad (5.4.2)$$

式中， V 为带电体系的体积，也可以是所研究空间的体积。

通过真空中的麦克斯韦方程组，将式（5.4.2）中的 ρ 和 \mathbf{j} 用电磁场量表示，即

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

可以将式（5.4.1）化为

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \quad (5.4.3)$$

再利用另外两个麦克斯韦方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

可以把式（5.4.3）写成对 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 对称的形式

$$\mathbf{f} = \left[\varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \varepsilon_0 \nabla \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (5.4.4)$$

由于 \mathbf{f} 等于带电体系的动量密度改变率，若把式（5.4.4）解释为动量守恒定律，则右边最后一项撤去负号后应该代表电磁场的动量密度改变率，因此，电磁场的动量密度为

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (5.4.5)$$

式(5.4.4)的方括号部分应该表示电磁场内部的动量转移, 为证明这点, 先把方括号部分变为一个张量的散度, 由矢量公式

$$\nabla \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2$$

得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} + (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} &= (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2 \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{I} E^2) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{I} E^2) \end{aligned}$$

式中, \mathbf{I} 是单位张量, 对任一矢量 \mathbf{A} 都有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

同理可得

$$\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{I} B^2 \right)$$

因此, 式(5.4.4)中的方括号部分可以化为一个二阶张量 \mathcal{T} 的散度, 令

$$\mathcal{T} = -\varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (5.4.6)$$

因此可将式(5.4.4)转化为

$$\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{T} \quad (5.4.7)$$

式(5.4.7)两边对体积 V 积分得

$$\int_V \mathbf{f} dV + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV = - \int_V \nabla \cdot \mathcal{T} dV = - \oint_S \mathbf{dS} \cdot \mathcal{T} \quad (5.4.8)$$

式中, $\int_V \mathbf{f} dV$ 是带电体系的动量变化率, $\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV$ 是电磁场的动量变化率, 左端表示体积 V 内带电体系和电磁场的总动量增加了, 增加的动量应该是由体积 V 外通过界面 S 流进体积 V 内的动量流。因此, 右端是由体积 V 外通过界面 S 流进体积 V 内的动量流, 张量 \mathcal{T} 称为电磁场动量流密度张量, 或称为电磁场应力张量。式(5.4.8)称为电磁场动量守恒定律的积分形式, 式(5.4.7)称为电磁场动量守恒定律的微分形式。

若讨论的区域 V 为全空间, 则式(5.4.8)中的面积分趋于零。

$$\int_{\infty} \mathbf{f} dV + \frac{d}{dt} \int_{\infty} \mathbf{g} dV = 0 \quad (5.4.9)$$

式(5.4.9)表示电磁场和带电体系的总动量变化率等于零, 带电体系的动量变化率等于电磁场的动量变化率的负值。这就是全空间的电磁场动量守恒定律。

电磁场的动量密度 \mathbf{g} 和能流密度 \mathbf{S} 的关系为

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (5.4.10)$$

对平面电磁波

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}$$

则一定频率的电磁波的平均动量密度

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) = \frac{\varepsilon_0}{2c} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{e}_k = \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{S}} \quad (5.4.11)$$

由于电磁波的能量密度 w 与能量密度 w 的关系为 $\mathbf{S} = cw\mathbf{e}_k$, 电磁波的动量密度与能量密度的关系为

$$\mathbf{g} = \frac{w}{c} \mathbf{e}_k \quad (5.4.12)$$

这个关系式对量子化后的电磁场也是成立的, 设单位体积中有 n 个光子, 能量密度为

$$w = n\hbar\omega$$

式中, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, 每个光子的动量为 \mathbf{p} , 则有

$$\mathbf{g} = n\mathbf{p} = n\hbar\mathbf{k} \quad (5.4.13)$$

式中, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_k$ 。

由于电磁场具有动量, 则当它入射到物体上时, 会对物体施加一定的压力, 这种压力称为辐射压力。当平面电磁波入射于金属表面时, 可以求得辐射压强为

$$P = \frac{1}{3} \bar{w} \quad (5.4.14)$$

\bar{w} 为金属表面附近处的电磁场能量密度的平均值, 式 (5.4.14) 对黑体辐射情况仍成立。

上述理论早已为实验证实, 在 1900 年前后, 就完成了光压实验。太阳对地球也有辐射压力, 将入射到地面上的太阳光视为平面波, 假定阳光完全被地面吸收, 已知阳光在地面上的能量密度为 $1.4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, 对地面上的辐射压力大约为 $4.5 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。但其作用与太阳对地球的引力相比, 是非常小的。对激光而言, 辐射压力就比较显著了, 如半径为 1cm 的一激光束, 在它的路径上以大约 3kg 的力推动物体。

必须指出, 两运动电荷之间相互作用力一般不遵守牛顿第三定律, 因为在这个体系中, 除了这两个带电质点外, 还有它们产生的电磁场, 在它们相互作用时, 这个电磁场也将发生变化。所以在这个体系中, 两带电质点和电磁场共三方之间进行动量交换。因此, 应该用动量守恒定律而不用牛顿第三定律, 这是值得注意的。

【例 5-7】 求平面电磁波的动量流密度张量。

解: 平面电磁波 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{k} 三个相互正交的矢量, 用这三个方向来分解 \mathcal{T} 的各个分量。

$$\text{利用 } \mathcal{T} = -\varepsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathcal{T} = -\varepsilon_0 E^2 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

因为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E}$, 对电磁波 $\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$, 则有

$$\mathbf{E} \cdot \mathcal{T} = 0$$

同理可证

$$\mathbf{B} \cdot \mathcal{T} = 0$$

由于 $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} = 0$, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 均垂直于 \mathbf{k} , 因此 \mathcal{T} 只有 $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$ 分量。

可求得

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathcal{T} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{1}{2} \mathbf{e}_k \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = w \mathbf{e}_k$$

因而

$$\mathcal{T} = w \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = c g \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$$

式中, \mathbf{e}_k 为波矢 \mathbf{k} 方向的单位矢量, g 为动量密度大小, 若选 \mathbf{k} 方向为 z 轴, 则 \mathcal{T} 只有 T_{33} 分量。

$$T_{33} = c g$$

习 题

- 5.1 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, $\varphi = \varphi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ 。其中 \mathbf{A}_0 、 \mathbf{k} 为常矢量, φ_0 、 ω 为常数。求:
 - (1) 洛伦兹规范下, \mathbf{A}_0 与 φ_0 之间应满足的关系;
 - (2) 求 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} ;
 - (3) $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_0 + \alpha \mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$; $\varphi' = (\varphi_0 + \alpha \omega) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, 其中 α 为待定常数, 证明 (\mathbf{A}', φ') 与 (\mathbf{A}, φ) 对应的是同一电磁场。
- 5.2 两个质量、电荷都相等的粒子相向而行发生碰撞, 证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。
- 5.3 设有一个球对称的电荷分布, 以角频率 ω 沿径向做简谐运动, 求辐射场, 并对结果给以物理解释。
- 5.4 位于原点沿 z 轴方向有一段 $d\mathbf{l}$, 其中输入交流电流 $I = I_0 \cos \omega t$ 。试求辐射场中任一点的矢势 \mathbf{A} , 电场强度 \mathbf{E} 、磁感强度 \mathbf{B} 及辐射功率 P 。
- 5.5 在与电偶极矩垂直的方向上, 相距 100 km 处测得辐射电场强度的振幅为 $100 \mu\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 。试求该电偶极子的总辐射功率。
- 5.6 两个金属小球分别带等量异号电荷 q 、 $-q$ 。它们之间的距离 l 固定, 两球上的电量和符号以角频率 ω 按谐振形式变化。试求该系统的辐射电磁场和辐射电阻。
- 5.7 电量为 q 的带电粒子, 以恒角速度 ω 沿半径为 a 的圆周转动 (它相当于电荷在均匀磁场中运动), 若 $\omega \ll \frac{c}{a}$, 仅考虑电偶极辐射。求辐射场、辐射能流及辐射功率。
- 5.8 在一半径为 a 的圆电流圈中, 输入振荡电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 其中 $a\omega \ll c$ 。求此电流圈的辐射场、辐射能流及辐射功率。

第 6 章 狭义相对论

前面几章讨论了电磁运动可遵循的规律,但是并没有涉及参考系的问题。众所周知,物理规律总是用一定的参考系表述的,宏观电磁场的普遍规律可以表示为麦克斯韦方程组,麦克斯韦方程组究竟在哪些参考系中成立呢?是否像经典力学那样,在所有惯性系都成立?从一个参考系变换到另一个参考系时,电动力学基本方程的形式如何改变?基本物理量 \boldsymbol{E} 和 \boldsymbol{B} 如何变换?这些都是必须回答的重大物理问题。在电动力学的发展过程中,参考系问题是一个很基本的问题。这个问题的解决是和时空观的建立联系在一起的,狭义相对论就是 1905 年爱因斯坦(A. Einstein)建立起来的关于新的时空观的理论,电动力学只有在新的时空观的基础上,才能发展成为适用于任何惯性系的理论。

相对论是关于物质运动和时间、空间关系的理论,它是现代物理学的基础理论之一。相对论包括两部分:狭义相对论和广义相对论。局限于惯性参考系的理论称为狭义相对论,推广到一般参考系和包括引力场在内的理论称为广义相对论。本章仅局限于讨论狭义相对论。

本章主要内容: 介绍狭义相对论的基本原理,并阐述电动力学的相对论不变性。

讲授思路: 先复习伽利略相对性原理,然后从狭义相对论的基本原理出发,导出洛伦兹变换,概述相对论时空观。引入四维空间,讲授相对论理论的四维形式,电动力学的相对论不变性及相对论力学。

6.1 伽利略相对性原理和伽利略变换

6.1.1 伽利略相对性原理

牛顿运动定律适用的参考系称为惯性系。相对于已知惯性系做匀速直线运动的参考系也都是惯性系,不言而喻,牛顿运动定律同样适用。因此,对不同的惯性系,力学的基本定律——牛顿定律的形式都是相同的,或者说力学规律对于一切惯性系都是等价的。这个理论称为伽利略相对性原理或经典力学的相对性原理。

6.1.2 伽利略变换

伽利略变换是伽利略相对性原理的数学表达式。

大家知道,在物理学中对物质运动的描述都是相对的,观测者所选的参考系不同,对运动的描述也就随之不同。现在讨论相对运动速度为 \boldsymbol{v} 的两个惯性系 Σ 系和 Σ' 系上的观测者,对某一运动物体所做的运动学和动力学描述有何异同。

为了方便起见,采用图 6-1 所示的两个惯性系, Σ 系和 Σ' 系的各对应轴相互平行, Σ' 系相对于 Σ 系以速度 \boldsymbol{v} 沿 x 轴方向做匀速直线运动。当 Σ 系和 Σ' 系的坐标原点 O 与 O' 重合时,两个惯性系中的时钟开始计时 ($t=t'=0$)。如果某时刻在空间某一点 P 发生了一个事件,这里所说的事件是指某一时刻发生在空间某一点上的一个现象。设想 Σ 系和 Σ' 系的观测者都在观测这一事件,在 Σ 系中以时空坐标 (x, y, z, t) 表示,在 Σ' 系中以时空坐标 (x', y', z', t')

表示。一个事件在两个惯性系中的两组时空坐标之间的变换关系为

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\quad (6.1.1)$$

式(6.1.1)称为伽利略坐标变换。

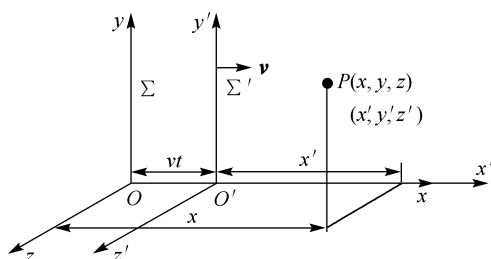


图 6-1 事件在不同惯性参考系下的示意图

把 x 、 y 、 z 和 x' 、 y' 、 z' 对时间求导, 可得伽利略速度变换

$$\begin{aligned}u'_x &= u_x - v \\u'_y &= u_y \\u'_z &= u_z\end{aligned}\quad (6.1.2)$$

矢量式为

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (6.1.3)$$

还可以得到两个惯性系加速度之间的关系

$$\begin{aligned}a'_x &= a_x \\a'_y &= a_y \\a'_z &= a_z\end{aligned}$$

矢量式为

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (6.1.4)$$

式(6.1.4)表明, 质点在两个惯性系中的加速度是相同的。在经典力学中, 质量 m 是一个恒量, 则有 $ma = ma'$ 。另一方面, 在牛顿力学中, 所有的力都是由于质点之间的相互作用, 而相互作用又取决于质点的相对坐标(两个质点间的距离)。而两个原点之间空间间隔在伽利略变换中是不变量, 因而在伽利略变换中, 两个质点之间的相互作用力也是不变量, 即

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}$$

因此, 牛顿定律对伽利略变换是不变的。

则对 Σ 系和 Σ' 系, 牛顿第二定律有相同的表达形式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{和} \quad \mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \quad (6.1.5)$$

即牛顿定律对伽利略变换是不变的。在力学中, 各种守恒定律, 如能量守恒定律、动量守恒定律和角动量守恒定律, 都可以证明为牛顿定律的推论。由此可知, 力学规律对伽利略变换是不变的, 即力学规律对一切惯性系都是等价的。

6.1.3 经典力学的绝对时空观

所谓时空观，就是有关时间和空间的物理性质的认识。伽利略变换是力学相对性原理的数学描述，它集中反映了经典力学的绝对时空观。

1. 时间间隔

伽利略变换说明了同一个事件在两个不同惯性系中的时空坐标之间的关系，这里特别注意 $t = t'$ 的含意。若有两个事件先后发生，在两惯性系中的观测者测得的时间间隔为

$$\Delta t = \Delta t' \quad (6.1.6)$$

式 (6.1.6) 表明时间间隔与惯性系的选择无关。

2. 空间间隔

如果在空间有任意两点，它们在上述 Σ 系和 Σ' 系的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 、 (x_2, y_2, z_2) 和 (x'_1, y'_1, z'_1) 、 (x'_2, y'_2, z'_2) ，利用伽利略变换，可以得到

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

即

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\Delta \mathbf{r}'| \quad (6.1.7)$$

式 (6.1.7) 表明空间任意两点之间的距离与惯性系的选择无关。

由以上伽利略变换得到了在两个不同惯性系中，时间间隔和空间间隔的测量与参考系的选择和观测者的相对运动速度无关，即时空和物质运动是互相分割的，无联系的。

如果把随惯性系而变的量视为相对的，把不随惯性系而变的量视为绝对的，可以看出，在经典力学中，物体的坐标和速度是相对的，同一地点也是相对的，但时间、长度和质量这三个基本物理量是绝对的，同时性也是绝对的。这就是经典力学的绝对时空观。

3. 经典力学的局限性

经典力学的相对性原理用于低速的力学现象是非常成功的。它是否可用于电磁现象呢？光就是电磁波，电磁波在真空中的传播速度为 c 。光的传播是否可用经典力学的规律讨论呢？以下的事实将说明这个问题。

900 多年前，有一次非常著名的超新星爆发事件。当时北宋王朝著名天文学家做了详细记载。据史书称，爆发出现在宋仁宗至和元年（公元 1054 年）5 月，在开始的 23 天中，这颗超新星非常亮，白天也能在天空上看到它，随后逐渐变暗，直到嘉佑元年（公元 1056 年）3 月才不能被肉眼看见，前后历时 22 个月。这次爆发的残骸就形成了著名的金牛座中的星云，称为蟹状星云。

这条古老的记录同光速颇有关系，当一颗恒星发生超新星爆发时，它的外围物质向四面八方飞散。也就是说，有些抛射物向着我们以速度 u 运动，如图 6-2 中的 A 点。有些抛射物的运动方向则在垂直方向，如图 6-2 中的 B 点。如果光速服从经典力学的速度变换定理，那么， A 点向我们发出的光的速度是 $c + u$ ，而 B 点向我们发出的光的速度则大约是 c 。这样由 A 点发出的光到达地球的时间是 $t_A = \frac{l}{c + u}$ ，而 B 点发出的光到达地球的时间是 $t_B = \frac{l}{c}$ 。蟹状星云

与地球的距离 $l \approx 5000$ 光年, 爆发中抛射物的速度 $u = 1500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ 。用这些数据来计算, 很容易得到 $t_B - t_A \approx 25$ 年。也就是说, 我们至少可以在 25 年里都可以看到开始爆发时所产生的强光, 然而这是错误的, 不符合事实的。历史的记录是不到两年就看不见了。这就证明这种推算有问题。估计似乎应该是从 A 点或 B 点向我们发射的光速度是一样的, 即光速与发光物体本身的运动速度无关。无论光源的运动速度多么大, 向我们发来的光的速度都是一样的。光速并不遵从经典力学的速度变换定理。

19 世纪末, 作为电磁学基本规律的麦克斯韦方程组得到了确立。它的一个重要成果是预言了电磁波的存在, 并证明了电磁波在真空中的传播速度等于真空中的光速 c , 从而揭示了光的电磁本性。随之出现的问题是: 电磁波或光在什么媒质中传播? 从麦克斯韦方程组得出的光速 c 是对哪一个参考系而言的? 现在大家都知道, 电磁场本身就是一种物质形式, 它可以在空间传播而无须

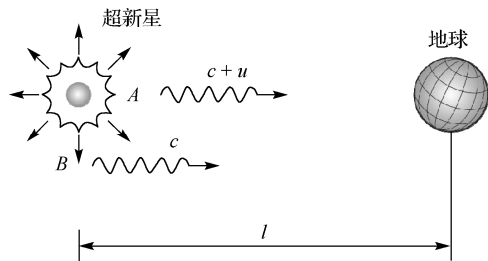


图 6-2 超新星爆炸示意图

其他物质作为媒质, 但在当时的历史条件下, 由于经典力学的广泛成功, 人们总是倾向于把一切物理问题都纳入一个机械模型。当时人们认为, 电磁波或光是在某种称为“以太”的媒质中传播的, 如同声波是在空气等媒质中传播一样。光速 c 应该是对“以太”参考系而言的, 如同声速是对空气参考系而言的一样。这样, 在电磁现象中, “以太”参考系是一个具有特殊地位的惯性参考系。只有在这个参考系真空中的光速恰好是 c 时, 麦克斯韦方程组才能适用。寻找“以太”和确定地球相对于“以太”的运动成为当时物理学的一个重要课题, 但是, 人们所做的许多实验都没有发现“以太”对光速的任何影响。其中, 以 1887 年迈克耳孙 (A. A. Michelson) 和莫雷 (E. W. Morley) 所做的实验最为著名。根据他们的设想, 如果宇宙中存在“以太”, 且“以太”又不为地球的运动所带动, 那么把“以太”选为绝对静止的参考系, 地球相对于“以太”的运动速度就是地球的绝对速度。由此他们设计了一台干涉仪 (迈克耳孙干涉仪), 先让干涉仪其中一支光臂沿着地球绕太阳运动的方向, 然后再转动干涉仪, 使另一支光臂沿地球运动的方向, 利用地球运动的绝对速度和光速在方向上的不同引起的干涉条纹的移动, 从而求得地球相对于“以太”的绝对速度。然而, 迈克耳孙和莫雷在不同季节、不同地点多次实验都无法观测到干涉条纹的移动, 从而无法验证“以太”对光速的影响。实验结果表明, 在任何惯性系中的所有方向上, 测量的光速都是 c , 不存在地球相对于“以太”的运动, 即否定了特殊参考系的存在。当时许多科学家曾提出不同的假设来解释迈克耳孙-莫雷实验的结果, 但是很少有人怀疑伽利略变换的正确性, 因而都不能解释实验结果。

在电磁波 (光波) 的传播速度问题上, 实验事实与经典力学的伽利略变换是不符合的, 在各种矛盾面前, 一般人们都是在以下两种可能性中做选择:

(1) 承认伽利略相对性原理, 麦克斯韦电磁理论需要修改;

(2) 承认麦克斯韦方程, 而认为伽利略相对性原理只适用于经典力学, 在电磁学中有绝对参考系。

爱因斯坦认为人们普遍地忘记了第三种可能性, 因而使自己陷入左右为难的困境, 这第三种可能性就是:

(3) 麦克斯韦电磁学理论是正确的, 相对性原理也是正确的, 但是它有新的表达形式, 它是一种既适合经典力学, 也适合电磁学的相对性原理。

就是在这种历史条件下, 爱因斯坦于 1905 年提出了光速不变原理和相对性原理, 并以此为基础创立了狭义相对论。

6.2 狭义相对论的基本原理

6.2.1 狭义相对论的两个基本假设

狭义相对论是以爱因斯坦的两个基本假设为出发点的, 这两个假设也称为狭义相对论的基本原理。

1. 相对性原理

物理定律在所有惯性系中都具有相同的形式。

爱因斯坦的相对性原理, 使相对性原理不仅包括力学定律, 而且也包括电磁相互作用定律及所有的物理定律。这就是说, 一切物理定律在所有惯性系中都具有相同的形式, 不存在一个特殊的惯性系。

2. 光速不变原理

在所有惯性系中, 光在真空中的传播速率具有相同的值 c 。

光速不变原理明确地指出它与经典力学的速度变换定理是根本对立的, 说明光速与观测者及光源的运动状态无关, 在任何惯性系中, 测得的真空中的光速都相同。整个狭义相对论就是由上述两条基本假设通过数学和逻辑上的推导得到的。

时空观的修改体现在光速不变原理中。例如, 两个惯性系 Σ 系和 Σ' 系, Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 轴以速度 \mathbf{v} 运动, 在 O 、 O' 重合时 ($t=t'=0$) 发一光脉冲 (信号), 如图 6-3 所示, 根据光速不变原理, 在 Σ 系看来, 任何时刻 t , 光的波前为一球面。

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (6.2.1)$$

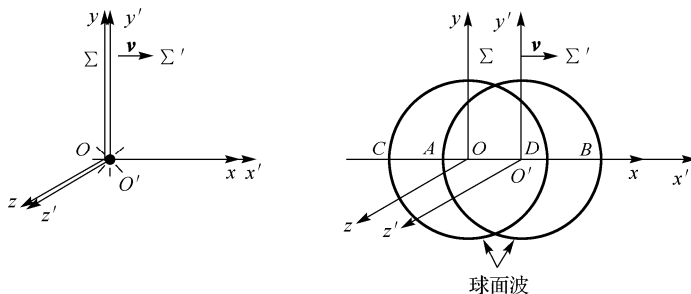


图 6-3 两个惯性系的光波前示意图

在 Σ' 系看来, 光信号也是在 Σ' 系的原点 O' 发出的, 根据光速不变原理, 在任何时刻 t' , 光的波前也是球面。

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (6.2.2)$$

值得注意的是, 由于光速不变原理, 时间不再是绝对的了。

如 A 、 B 是 $t'=1\text{s}$ 时波前上的两点, 对于 Σ' 系来说, 光波在 $t'=1\text{s}$ 时同时到达这两点, 是

两个同时事件。从 Σ 系看来, C 、 D 同时到达, 是 $t=1\text{s}$ 时波前上的两点, 所以 Σ 系的观测者认为先到达 A 点, 因为 $t_A < t_C = 1\text{s}$, 后到达 B 点。 $t_B > t_D = t_C = 1\text{s}$, 因此在 Σ 系看来, 并不是同时到达 A 、 B 两点的, 所以, 球面 S_2 不是波前, 同样在 Σ' 系中也认为, $t_D \neq t_C$ 即光波不是同时到达 C 、 D 两点的, 所以在 Σ' 系中, 球面 S_1 也不是波前。

相对论里, 不仅要给出物体在某惯性系中的位置, 而且同时要给出物体处于该位置的时刻, 即参考系要带上自己的时钟, 因为 $t \neq t'$ 。总之, 承认光速不变原理, 就必须放弃不同的惯性系具有同样时间坐标的概念。

6.2.2 间隔不变性

再看一下式(6.2.1)与式(6.2.2)

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \\ c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0 \end{aligned}$$

在两个惯性系之间, (x, y, z, t) 换成了 (x', y', z', t') , 但是上述组合形式却取同样的值而不改变。于是有一个不变量

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (6.2.3)$$

称为两个事件的时空间隔, 如果在空间点 (x, y, z) 和原点是以光信号相联系的, 这个间隔取值为零。为了数学形式上的需要, 引入

$$x_4 = ict \quad (6.2.4)$$

并把 (x, y, z) 记为 (x_1, x_2, x_3) , 则有

$$s^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = -x_\mu x_\mu \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (6.2.5)$$

为简化书写, 在理论物理中常用重复指标代替求和符号, 规定在一个项中若两个量的下标重复, 就表示对该下标所有可能的值求和, 这种简化方法称为爱因斯坦求和约定。通常用 $\mu, \nu, \lambda \dots$ 等希腊字母代表四维空间的分量, 用 $i, j, k \dots$ 等拉丁字母表示三维空间分量。这个间隔除了前面冠以负号外, 形式上相当于三维笛卡儿坐标空间的距离, 但是从三维空间扩展到四维抽象空间, 前三维是空间坐标, 再加上相应于时间的一维坐标。四维坐标中, x_1, x_2, x_3 仍是实数, 但 x_4 是纯虚数, 或者说式(6.2.5)右边各项不同号。

这样的空间称为闵可夫斯基(Minkowski)空间, 以区别于以前的欧几里德(Euclid)空间。而在闵可夫斯基空间里, 两个事件的时空间隔保持不变。

$$s^2 = s'^2 \quad (6.2.6)$$

这就是光速不变原理的数学表述。

6.2.3 洛伦兹变换

时空的性质是通过坐标系的变换关系体现出来的, 与经典力学的绝对时空观相对应的是伽利略变换, 满足狭义相对论两条基本假设的时空变换关系是洛伦兹变换。

以下从这两个基本假设出发导出洛伦兹变换。

为了让洛伦兹变换形式简单, 而又不失普适性, 仍选用图6-1所示的两个惯性系 Σ 系和 Σ'

系。 Σ 系和 Σ' 系的各对应坐标轴彼此平行, x' 轴与 x 轴重合。 Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 轴以速率 v 做匀速直线运动, 在 $t=t'=0$ 时, 坐标原点 O' 与 O 重合。

设当 O' 与 O 重合时, 位于 O 点处的点光源发出一光脉冲, 将此时刻视为在 Σ 系和 Σ' 系中的计时起点。在 Σ 系中, 光脉冲以速率 c 向各个方向传播, 在任意时刻 t , 光波波前与点光源的距离为

$$r = ct$$

而

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

所以

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (6.2.7)$$

这正是在 Σ 系中描写光脉冲波前的球面方程。

根据光速不变原理, 在 Σ' 系中同样观测到光脉冲以速率 c 自 O' 点向各个方向传播, 所以在 Σ' 系中光脉冲波前同样为球面, 其方程为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (6.2.8)$$

式 (6.2.7) 和式 (6.2.8) 表明

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (6.2.9)$$

式 (6.2.9) 表明 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ 是不随惯性系的变化而变化的不变量, 在狭义相对论中称为间隔不变性。由于光速不变原理与伽利略变换是不相容的, 所以伽利略变换不可能使式 (6.2.7) 和式 (6.2.8) 同时成立。要使上述的式 (6.2.7) 和式 (6.2.8) 能够同时成立, 必须寻找一种新的时空变换关系。

这种新的时空变换关系应该满足狭义相对论的相对性原理, 因此新的时空变换关系必须是线性的, 因为只有这样, 才能保证当物体在一个惯性系做匀速直线运动时, 在另一个惯性系也观测到它做匀速直线运动。还应该考虑到当速率 $v \ll c$ 时, 这个变换应过渡到伽利略变换, 因为在这种情况下, 伽利略变换被实践检验是正确的。为此, 我们设

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}t \\ t' &= a_{21}x + a_{22}t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

为了简单起见, 现在研究在 Σ 系中观测 Σ' 系中的 O' 点 ($x'=0$) 的运动。很显然, 在 Σ 系中各点 (Σ 系中的坐标为 x) 观测到 Σ' 系中 $x'=0$ 的点沿 x 轴方向运动, 速度为 v , 即 $x'=0$, $\frac{dx}{dt} = v$ 。根据式 (6.2.10), 若 $x'=0$, 则有

$$a_{11}x + a_{12}t = 0$$

由此得

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}t$$

故

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = v \quad (6.2.11)$$

联立式 (6.2.9)、式 (6.2.10)、式 (6.2.11) 可解得

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\a_{12} &= \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\a_{21} &= \frac{-v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

将此结果代入式 (6.2.10), 即可得到洛伦兹时空坐标变换关系

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned} \quad (6.2.12)$$

式 (6.2.12) 称为洛伦兹时空坐标变换关系, 简称为洛伦兹变换。将式 (6.2.12) 中带撇的量与不带撇的量互换, 并将 v 换成 $-v$, 即可得到洛伦兹变换的逆变换, 即从 Σ' 系到 Σ 系的变换关系为

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned} \quad (6.2.13)$$

对于洛伦兹变换, 做如下几点说明。

(1) 洛伦兹变换表达的是同一事件在不同惯性系中时空坐标的变换关系。从变换式可以看出, x' 是 x 和 t 的函数, t' 也是 x 和 t 的函数, 而且都与 Σ 系和 Σ' 系的相对运动速度 v 有关。揭示出时间、空间和物质运动之间的联系。

(2) 该变换彻底否定了 $t=t'$ 的绝对时间概念, 明确地表示出时间坐标与空间坐标有关, 指出在不同的惯性系中, 一般 $t \neq t'$ 。在相对论中, 时间和空间的测量互相不能分离, 而是联系成一个整体的。因此常把一个事件发生时的位置和时刻联系起来, 称为它的时空坐标。

(3) 从变换式可以看到, 因为时间和空间坐标都是实数, 所以 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 不应该出现虚数。这就要求 $v < c$, 而 v 代表两个惯性系的相对速度。由此得到一个结论: 宇宙中任何物体的运动速度是不可能等于或超过真空中的光速的。这是狭义相对论理论本身要求的, 它已被科学实验所证实。

(4) 当 $v \ll c$ 时, 洛伦兹变换就转化为伽利略变换, 此时相对论力学的规律也就转化为经典力学的规律。这样相对论指出了牛顿力学的局限性和适用范围, 即在 $v \ll c$ 的低速情况下, 经典力学的结论是成功的。

(5) 洛伦兹变换是爱因斯坦狭义相对论的必然结果, 爱因斯坦以狭义相对论的两条基本假设为基础, 推导出了此变换式 (1905 年)。

为什么称为洛伦兹变换呢? 前面讲过, 光的传播速度在任何惯性系都为 c 的事实, 用经典力学无法解释, 人们认为光速 c 是对“以太”这个绝对惯性系而言的。地球相对于“以太”的速度是确定的, 成为当时许多科学家关注的焦点之一。著名的迈克耳孙-莫雷实验否定了“以太”的存在, 为了解释迈克耳孙-莫雷实验, 荷兰物理学家洛伦兹提出相对于“以太”运动的物体会有长度缩短, 但这收缩的物理原因却无法解释, 并且在爱因斯坦提出狭义相对论之前得到了此变换式, 所以称为洛伦兹变换。爱因斯坦和洛伦兹分别得到了同样的变换式, 但他们的出发点是完全不同的。爱因斯坦不像洛伦兹那样, 千方百计地弥合实验与经典理论的裂痕, 爱因斯坦关心的是力学和电磁学定律之间关于运动相对性的不对称性。由此得到启迪, 当理论与实验发生矛盾时, 不要受传统观念的束缚, 应该从根本上创造新理论, 而这个新的理论在一定的条件下将过渡到原有的理论。正如爱因斯坦的相对性原理继承和发展了伽利略相对性原理, 伽利略变换是洛伦兹变换在低速情况下的近似。洛伦兹不能抛弃传统的观念, 尽管在数学形式上得到了洛伦兹变换, 但不能认识它的本质, 也就不可能创立狭义相对论。

6.3 相对论的时空理论

6.3.1 同时性的相对性

经典力学的绝对时空观认为: 所有惯性系具有同一的绝对时间, 于是同时性也是绝对的, 这就是说, 如果有两个事件, 在某个惯性系中观测是同时发生的, 那么在所有其他惯性系中观测也是同时发生的。

狭义相对论指出, 同时性是相对的, 在一个惯性系中是同时发生的两个事件, 在另一个惯性系就不一定是同时的了。

同时性的相对性是光速不变原理的直接结果, 可由洛伦兹变换得到证明。

如果两个事件在 Σ' 系是同时不同地点发生的, 在 Σ 系中观测是否是同时发生的呢?

如图 6-4 所示, 在 Σ' 系中, A 和 B 的中点发出一个光信号, 在 Σ' 系中观测, 光信号同时到达 A 和 B 。在 Σ 系中光信号到达 A 和 B 这两个事件的时空坐标分别为 (x'_1, t'_1) , (x'_2, t'_2) , 其中 $t'_1 = t'_2$ 。设在 Σ 系中观测到此两事件的时空坐标分别为 (x_1, t_1) , (x_2, t_2) , 那么在 Σ 系中, 是否也观测到光信号同时到达 A 和 B 点呢?

由洛伦兹变换可以得到在 Σ 系中这两个事件发生的时间分别为

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

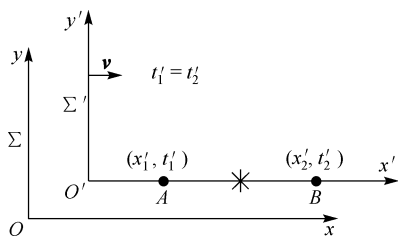


图 6-4 两个事件在不同惯性系下的示意图

其时间间隔为

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) \right]$$

由于 $t'_2 - t'_1 = 0$ ，则有

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.3.1)$$

结果表明，在 Σ 系观测光信号不是同时到达 A 和 B 的。由于 $x'_2 - x'_1 > 0$ ，则 $t_2 > t_1$ ，说明 t_1 时刻在先， t_2 时刻在后，光信号先到达 A ，后到达 B 。

由式(6.3.1)得出结论：若两个事件在某一惯性系中为同时异地事件，即 $t'_1 = t'_2$ ， $x'_2 - x'_1 \neq 0$ ，则在其他惯性系中必定不是同时发生的，这就是同时性的相对性。只有在一个惯性系中同时同地发生的事件，即 $t'_1 = t'_2$ ， $x'_2 - x'_1 = 0$ ，在其他惯性系也必同时同地发生，因此同时性的相对性只是对两个同时事件发生在不同地点而言的，当两个同时事件发生于同一地点，同时性是绝对的。

6.3.2 空间间隔的相对性

由于空间间隔是伽利略变换下的不变量，即在经典力学的绝对时空观中，一个物体的长度是绝对的。在狭义相对论的时空观念中，长度的量度是相对的，与物体或观测者的运动有关。以下根据洛伦兹变换关系推导两个惯性系中测得的同一物体长度之间的关系。

设有一根刚性直杆沿 x' 轴静止放置在 Σ' 系中，杆两端点的坐标分别为 x'_1 和 x'_2 ，则在 Σ' 系中测得杆的长度为

$$L_0 = |x'_2 - x'_1|$$

L_0 称为固有长度或静止长度。

对 Σ 系的观测者来说，杆沿 x 轴以速度 v 运动， Σ 系的观测者测得杆两端点的坐标分别为 x_1 和 x_2 ，杆的长度应该是

$$L = |x_2 - x_1|$$

L 称为运动长度。

根据洛伦兹变换

$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\x'_2 &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\x'_2 - x'_1 &= \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

当待测物体相对于观测者静止时，一个物体的长度是所测得的物体两个端点位置之间的距离。然而，当待测物体相对于观测者运动时，一个物体的长度就必须是同时记录下来的物体两个端点的位置之间的距离，如果不是同时记录下两端点的位置坐标，则测得的距离不是物体的长度。在 Σ 系测量 Σ' 系中物体的长度时，必须同时测量两端点的位置，即要求必须满足条件 $t_1 = t_2$ ，这样由上式得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

或

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

即

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6.3.2)$$

由此可见，运动着的物体在运动方向上的长度缩短，是物体固有长度的 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍。这就是相对论中的长度收缩或运动长度缩短。

6.3.3 时间间隔的相对性

爱因斯坦提出的光速不变原理的实质是否定了经典力学时空观中绝对时间的概念，洛伦兹变换表明时间坐标与空间坐标密切相关，因此在狭义相对论时空观中同时性的概念和时间的量度都与参考系有关，都是相对的。

仍取图 6-1 所示的两个惯性系 Σ 系和 Σ' 系，假设在 Σ' 系中同一地点 x' 处发生了两个事件，由 Σ' 系的观测者测量两个事件经历的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

由于 Σ' 系相对于 Σ 系以速度 v 沿 x 轴方向运动，利用洛伦兹变换可以得到 Σ 系中的观测者所记录的上述两个事件发生的时刻分别为

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其中

$$x'_1 = x'_2 = x'$$

时间间隔为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

人们常把某一参考系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔称为固有时间间隔, 用 τ_0 表示。以上的讨论中假设在 Σ' 系同一地点发生了两个事件, 因此 $\tau_0 = \Delta t'$, 相应地有 $\tau = \Delta t$, 则有

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.3.3)$$

应该注意到, τ_0 是 Σ' 系中的观测者在坐标为 x' 点所测得的两个事件时间间隔, 相对 Σ' 系, 发生事件的那个坐标为 x' 的点是静止的; 而 τ 是 Σ 系中的观测者所测得的该两个事件的时间间隔, 相对于 Σ 系来说, 发生事件的那个点是运动的, 由式 (6.3.3) 可知, $\tau > \tau_0$, 这就是说, 对发生事件地点做相对运动的惯性系中测得的时间间隔 τ 比相对静止的惯性系测得的时间间隔 τ_0 长, 是静止时间间隔的 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍, 这就是相对论中的时间延缓或运动时钟变慢, 如图 6-5 所示。

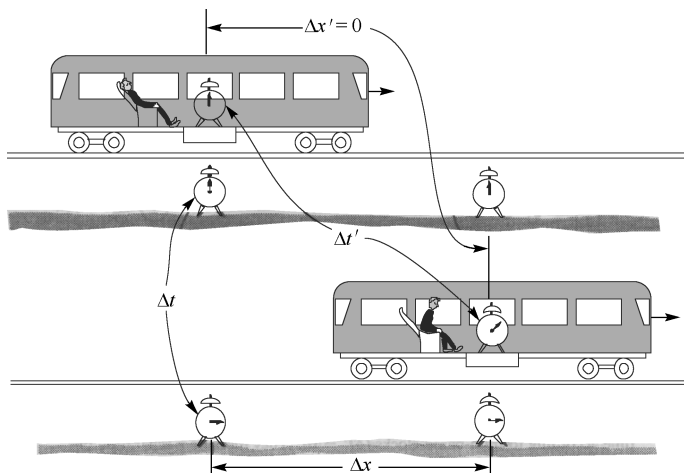


图 6-5 不同参考系下的时钟示意图

【例 6-1】 静止的带电 π 介子的半衰期为 $1.77 \times 10^{-8} \text{s}$ (不稳定粒子数目减少一半经历的时间称为半衰期, 即当 $t = T_{1/2}$ 时, $N = N_0 / 2$)。今有一束平行运动的 π 介子, 速率为 $0.99c$, 在离 π 介子源 (加速器中的靶) 39m 处, 发现它的强度已减少为原来强度的一半, 试解释这一实验结果。

解: (1) 用经典力学解释实验结果

按照经典力学, π 介子束在半衰期内, 即半数衰变前通过的路程为

$$S = uT_{1/2} = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.77 \times 10^{-8} = 5.3 \text{m}$$

这显然与实验结果发生矛盾, 这是由于 π 介子的运动速度接近光速, 牛顿力学已不适用, 必须考虑相对论效应。

(2) 用运动时钟变慢效应解释实验结果

设实验室参考系为 Σ 系, 随同 π 介子一起运动的惯性系为 Σ' 系。根据题意, Σ' 系相对于 Σ 系的运动速度为 $v = 0.99c$, π 介子的半衰期在 Σ' 系为 $1.77 \times 10^{-8} \text{s}$, 这是相对于 π 介子静止的时钟测量的, 为固有时间, 用 τ_0 表示。而在实验室参考系即 Σ 系中观测, π 介子以高速运动, 测得的半衰期应为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1.77 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.99c}{c}\right)^2}} = 1.26 \times 10^{-7} \text{s}$$

π 介子在这段时间内通过的路程为

$$S = u\tau = 0.99 \times 3 \times 10^8 \times 1.26 \times 10^{-7} = 37.5 \text{m}$$

这与实验结果基本符合。

(3) 用长度收缩效应解释实验结果

在 π 介子系, 即 Σ' 系的半衰期为 $\tau_0 = 1.77 \times 10^{-8} \text{s}$, π 介子系的观测者认为, 实验室参考系即 Σ 系的尺子是运动的尺, 是要缩短的, Σ 系测得的当 π 介子束的强度减少到原强度的一半时前进的距离为 39m, 在 Σ' 系只有

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 39 \times \sqrt{1 - \left(\frac{0.99c}{c}\right)^2} = 5.5 \text{m}$$

通过这段距离所需的时间等于

$$t = \frac{L}{u} = \frac{5.5}{0.99c} = \frac{5.5}{2.97 \times 10^8} = 1.86 \times 10^{-8} \text{s}$$

与 π 介子系测得的半衰期基本一致。

由以上的讨论可以看出, 用牛顿力学解释实验结果时, 一方面利用了 Σ 系 (实验室系) 的长度测量结果 (39m), 另一方面又利用了 Σ' 系 (π 介子系) 的时间测量结果 ($1.77 \times 10^{-8} \text{s}$), 并且错误地将它们结合在一起, 导致与实验结果矛盾的结论。用运动时钟变慢效应解释实验结果, 利用了 Σ 系 (实验室系) 的测量结果 (长度为 39m, 时间为 $1.26 \times 10^{-7} \text{s}$), 表示实验室的观测者测量的运动的 π 介子的半衰期比静止的 π 介子的半衰期大得多, 在半衰期内可通过 39m。用长度收缩效应解释实验结果, 利用 Σ' 系 (π 介子系) 的长度和时间测量结果 (长度

为 5.5m , 时间为 $1.77 \times 10^{-8}\text{s}$, 表示运动着的 π 介子观测到实验室的空间距离缩短了, 在它的固有半衰期内能通过这段距离。因此相对论的时钟变慢与长度收缩总是紧密联系在一起的。所有验证相对论时钟变慢效应的近代物理实验, 都同样验证了相对论长度收缩效应。

6.3.4 时序与因果律

在狭义相对论中, 同时性是相对的, 不同地点发生的两个事件, 在一个惯性系中是同时的, 在另一个惯性系中就不再是同时的了。以下的讨论将指出, 两个事件发生的先后次序在一定条件下也是相对的。

设有两个事件, 在 Σ 系中, 事件 1、2 的时空坐标分别为 (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) , 在 Σ' 系中, 事件 1、2 的时空坐标为 (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) , (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) , 由洛伦兹变换式 (6.2.12) 有

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.3.4)$$

设 $t_2 - t_1 > 0$, 即在 Σ 系中事件 1 先发生, 事件 2 后发生。由式 (6.3.4) 知, 当满足如下条件时

$$(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) < 0 \quad (6.3.5)$$

则有 $t'_2 - t'_1 < 0$, 即 $t'_2 < t'_1$, 在 Σ' 系中观测事件发生的次序正相反。如果这两件事有因果关系, 例如, 在 Σ 系中, t_1 时刻发射炮弹, t_2 时刻击中目标, 在 Σ' 系中这两件事的次序颠倒, 将和因果律发生矛盾。为了克服这一矛盾, 爱因斯坦假定任何物体的运动速度或相互作用的传播速度都不可能大于真空中光速 c , 这个假定也称为最大速度原理。按此假定, 因果律就不会破坏了。

若在 Σ 系中 $t_2 - t_1 > 0$, 为保证在 Σ' 系中 $t'_2 - t'_1 > 0$, 必须满足条件

$$(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) > 0 \quad (6.3.6)$$

或

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} v < c^2 \quad (6.3.7)$$

取

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u \quad (6.3.8)$$

u 代表联系因果事件的信号速度, 例如, 发射炮弹与击中目标两个事件是由炮弹发射作为信号联系的, u 就是炮弹的运动速度。按爱因斯坦假定, u 、 v 都不可能大于 c , 因此 $uv < c^2$ 总能满足。这就保证了因果律不被破坏。

若两个事件需要超光速的信号才能联系, 即

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > c \quad (6.3.9)$$

那么此速度不应代表物体的运动速度或相互作用的传播速度, 这样两事件的时间次序就会颠倒, 它们之间不可能有因果关系。

把有因果关系的事件称为关联事件, 原因必须发生在结果之前, 因果律要求关联事件的时序在洛伦兹变换下是不变的, 其主要条件是关联事件之间的信号联系或作用传播速度不能超过光速 c 。

在相对论中, c 作为物体运动和相互作用传播的极限速度, 这是因果律所要求的, 直到目前, 实验上没有发现任何被确认的超光速的物体运动, 也没有发现任何的超光速传播的相互作用。这就肯定了相对论和因果律的一致性。

6.3.5 相对论时空结构

在狭义相对论中, 两个事件的时间间隔和空间间隔都是相对的。为简单起见, 设第一事件为时空原点 $(0,0,0,0)$, 设第二事件的时空坐标为 (x,y,z,t) , 这两个事件的时空间隔定义为

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - r^2 \quad (6.3.10)$$

式中, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 由洛伦兹变换可直接证明 s^2 是一个不变量, 即

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2 \quad (6.3.11)$$

式 (6.3.11) 说明时空间隔是与参考系无关的绝对量。按两个事件的时空间隔的取值情况, 可以分为以下三种情况。

(1) 当 $s^2 = 0$ 时

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (6.3.12)$$

即这两个事件可用光信号来联系, 这种类型的间隔称为类光间隔。

(2) 当 $s^2 > 0$ 时

$$r^2 < c^2 t^2 \quad (6.3.13)$$

即这两个事件可以用低于光速的信号来联系, 称为类时间隔。这类事件发生的先后次序是绝对的。

(3) 当 $s^2 < 0$ 时

$$r^2 > c^2 t^2 \quad (6.3.14)$$

这类事件的间隔称为类空间隔, 这两个事件的空间距离大于真空中的光波在 t 时间内的传播所能通过的距离, 因此不能有因果关系。

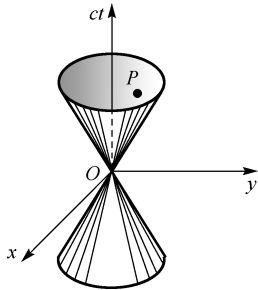


图 6-6 时空光锥

由于在从一个惯性系到另一个惯性系的变换中, 间隔 s^2 保持不变, 因而上列三种间隔的划分是绝对的, 不因参考系的变换而改变。为清楚上述的分类, 可以把三维时空和一维时间统一起来考虑, 每一个事件用这四维时空的一个点表示, 为了能用直观图像表示, 我们暂时限于考虑二维空间 (坐标为 x, y) 与一维时间 (取时间坐标为 ct) 一起构成的三维时空, 如图 6-6 所示, 每一个事件用这三维时空的一个点 P 表示。 P 点在 xOy 平面上的投影表示事件发生的地点, P 点的垂直坐标表示事件发生的时刻乘以 c 。

对应上述三种情况, P 点属于三个不同区域。

(1) 若事件 P 与事件 O 的间隔 $s^2 = 0$, 则 $r = ct$, 因而 P 点在一个以 O 为顶点的锥面上, 这个锥面称为光锥, 凡在锥面上的点都可以和 O 点用光波联系。 O 、 P 之间为类光间隔。

(2) 若事件 P 与事件 O 的间隔 $s^2 > 0$, 则 $r < ct$, 因而 P 点在光锥之内。 P 点与 O 点可用低于光速的信号联系。 O 、 P 之间为类时间隔。

(3) 若事件 P 与事件 O 的间隔 $s^2 < 0$, 则 $r > ct$, P 点在光锥外, P 点不可能与 O 点用光波或低于光速的作用联系。 O 、 P 之间为类空间隔。

若 P 点在上半个光锥, 其 $t > 0$, 相对于 O 为绝对的未来。

若 P 点在下半个光锥, 其 $t < 0$, 相对于 O 为绝对的过去。

6.3.6 相对论的速度变换

根据洛伦兹变换关系, 可推出相对论的速度变换公式。

设 $u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}$

为物体相对于 Σ 系的速度, Σ' 系相对 Σ 系以速度 v 沿 x 方向运动, 由洛伦兹变换式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

取微分

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{dx - vdt}{dt \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{aligned}$$

同理可得 u'_y 、 u'_z 。

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

逆变换公式为

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x} \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

式(6.3.15)称为相对论的速度变换公式, 式(6.3.16)称为相对论的速度逆变换公式。对相对论速度变换公式做以下几点讨论。

(1) 虽然 Σ 系和 Σ' 系间的相对速度仅沿 x 轴方向, 但是 $u'_y \neq u_y$, $u'_z \neq u_z$, 这是因为两个坐标系中的时间标度不一样。

(2) 如果 $v \ll c$ 、 $u \ll c$ (非相对论近似), 则 $u_x \approx u'_x + u$, $u_y \approx u'_y$, $u_z \approx u'_z$, 则相对论速度变换公式过渡到经典力学的速度变换公式。

(3) 可以证明, 只要在一个参考系中 $u < c$, 那么在另一个参考系中永远是 $u < c$, 而这结论正是相对论所要求的。

【例 6-2】 证明: 若物体相对一个参考系的运动速度 $|u| < c$, 则在任一参考系亦有 $|u'| < c$ 。

解: 设物体在时间 dt 内的位移为 dx , 由间隔不变性

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

$$\text{由 } \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx'}{dt'} = u'$$

$$(c^2 - u^2)dt^2 = (c^2 - u'^2)dt'^2$$

因为 $u < c$, 左边为正数, 右边也应为正数。则

$$u' < c$$

因此真空中的光速 c 为一切相互作用传播的极限速度。

6.4 相对论理论的四维形式

本节我们将把四维时空理论用简洁的四维形式表示出来, 利用这种形式可以很清楚地显示一些物理量之间的内在联系, 并且可以把相对论原理用非常明显的形式表达出来。

6.4.1 洛伦兹变换的四维形式

已知在洛伦兹变换下, 四维时空的间隔

$$s^2 = -x_\mu x_\mu$$

是一个不变量，而洛伦兹变换是一种时空四维坐标的线性变换。间隔不变性可以写成

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量} \quad (6.4.1)$$

洛伦兹变换是满足间隔不变性的四维线性变换，四维线性变换的形式可以写为

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (6.4.2)$$

$a_{\mu\nu}$ 是变换系数或变换矩阵元。

间隔不变性要求

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu$$

将式 (6.4.2) 代入

$$x'_\mu x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu a_{\mu\sigma} x_\sigma = a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} x_\nu x_\sigma$$

其中

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma} \quad \delta_{\nu\sigma} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \sigma \\ 1 & \nu = \sigma \end{cases} \quad (6.4.3)$$

为正交变换条件。

对 $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$ 乘以 $a_{\mu\sigma}$

$$a_{\mu\sigma} x'_\mu = a_{\mu\sigma} a_{\mu\nu} x_\nu = \delta_{\sigma\nu} x_\nu = x_\sigma$$

由此可以得到逆变换式

$$x_\sigma = a_{\mu\sigma} x'_\mu \quad (6.4.4)$$

变换系数可以写成矩阵形式

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (6.4.5)$$

转置矩阵定义为

$$\tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (6.4.6)$$

正交条件可用矩阵表示为

$$a_{\mu\nu} a_{\nu\mu} = I \quad (6.4.7)$$

只要构造出满足式 (6.4.7) 的矩阵，就对应了一个保持四维间隔不变的洛伦兹变换。沿 x 方向的特殊洛伦兹变换式为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

上式的变换矩阵为

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (6.4.8)$$

式中

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.4.9)$$

例如

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ &= \gamma x_1 + 0 + 0 + i\beta\gamma x_4 \\ &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

洛伦兹变换的逆变换式为

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其变换矩阵为

$$a_{\nu\mu} = \tilde{a}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (6.4.10)$$

由式 (6.4.8) 和式 (6.4.10) 容易验证

$$a_{\mu\nu}a_{\nu\mu} = \mathbf{I}$$

此式正是正交条件。

6.4.2 四维协变量

1. 物理量按空间变换性质的分类

物理量可以分为标量、矢量、张量等。这种分类是根据物理量在三维空间转动下的变换性质来规定的。

(1) 标量。有些物理量在空间没有取向关系, 当坐标系转动时, 这些物理量保持不变, 这类物理量称为标量, 如质量、电荷等都是标量。设在坐标系 Σ 中某标量用 u 表示, 在转动后的坐标系 Σ' 中用 u' 表示, 由标量不变性有

$$u' = u \quad (6.4.11)$$

(2) 矢量。有些物理量在空间有一定的取向性, 这种物理量用三个分量表示。当空间坐标变换按下列方式做转动变换时

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (6.4.12)$$

物理量的三个分量按同一方式变换, 这类物理量称为矢量, 如速度、力、电场强度、磁场强度等都是矢量。用 \mathbf{v} 代表矢量, 满足如下变换关系

$$v'_i = a_{ij} v_j \quad (6.4.13)$$

有些微分算符也具有矢量性质。例如, ∇ 算符, 它在 Σ 系中的分量为 $\partial/\partial x_i$, 在 Σ' 系中的分量为 $\partial/\partial x'_i$ 。根据微分公式及式 (6.4.12) 有

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (6.4.14)$$

此变换关系与式 (6.4.13) 相同, 因此, ∇ 算符是一个矢量算符。

(3) 二阶张量。有些物理量可用两个矢量指标表示, 有 9 个分量。当空间转动时, 其分量 T_{ij} 按以下方式变换

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (6.4.15)$$

具有这种变换关系的物理量称为二阶张量, 如电四极矩张量、电磁场应力张量等。

2. 四维协变量

在四维形式中, 时间与空间统一在一个四维空间内。惯性参考系的变换相当于四维空间的“转动”。由于物质在时空中运动, 描述物质运动和属性的物理量必然会反映出时空变换的特点。将三维情形推广, 也可以按照物理量在四维空间转动 (洛伦兹变换) 下的变换性质将物理量分为三类。

(1) 在洛伦兹变换下不变的物理量称为洛伦兹标量或不变量

例如, 间隔 $ds^2 = -dx_\mu dx_\mu$ 为洛伦兹标量。

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= c^2 d\tau^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= c^2 d\tau^2 \end{aligned}$$

所以 $ds = cd\tau$, 固有时间间隔 $d\tau = \frac{1}{c} ds$ 也是洛伦兹标量。

(2) 具有 4 个分量的物理量, 如果它在惯性系变换下满足下列变换

$$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu \quad (6.4.16)$$

则称为四维矢量。

下面介绍四维速度矢量 U_μ , 物体的位移 dx_μ 为四维矢量, 固有时间间隔 $d\tau$ 是标量。因为

dt 是一个随坐标系而改变的量。用固有时间间隔 $d\tau$ (标量) 来定义四维速度矢量

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (6.4.17)$$

而通常定义下的速度

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.4.18)$$

u_i 是用参考系 Σ 的时间量度的位移变化率。 U_μ 是用固有时间间隔量度的位移变化率。

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad (6.4.19)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ds = c d\tau$$

因此

$$U_\mu U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = -\frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2 \quad (6.4.20)$$

这说明 $U_\mu U_\mu$ 是一个不变量。事实上, 若 U_μ 构成一个矢量, 它的指标缩并必须是一个不变量, 另一方面, 这说明 U_4 是不独立的。

对于 U_μ 的前三个分量

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{u_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.4.21)$$

所以四维速度矢量

$$U_\mu = \gamma(u_1, u_2, u_3, ic) \quad (6.4.22)$$

四维速度矢量的前三个分量是和普通速度相联系的, 当 $v \ll c$ 时, 即为 \mathbf{u} , 就是牛顿经典力学中的速度。当参考系变换时, 四维速度矢量满足变换关系

$$U'_\mu = a_{\mu\nu} U_\nu \quad (6.4.23)$$

再介绍四维波矢量。平面电磁波的表达式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

其中指数括号中表示位相, 它应该与参考系的选择无关。另一方面, 括号中第一项含 \mathbf{r} , 而第二项中的 t 配上常数 c 和 i 构成 x_μ 的第四分量, 所以可以定义四维波矢量

$$k_{\mu} = \left(\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right) \quad (6.4.24)$$

这样写的意思是 \mathbf{k} 的前三个分量为 k_1, k_2, k_3 , 而 $i \frac{\omega}{c}$ 作为 k_4 和它们构成一个四维矢量 k_{μ} 。在这样的定义下

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \left(i \frac{\omega}{c} \right) \cdot (ict) = k_{\mu} x_{\mu} \quad (6.4.25)$$

这不仅形式简化, 而且进一步反映了频率 ω 和波矢量 \mathbf{k} 相关联的物理实质。对于光子来说, k_4 即为能量, 这预示了能量为四维动量矢量的第四分量。

四维波矢量的变换性质不需要再去推导, 它也像时空坐标一样地变换, 只要相应地把 \mathbf{x} 和 x_4 改成 \mathbf{k} 和 k_4 就行了 (注意 $x_4 = ict$, $k_4 = i \frac{\omega}{c}$)。

在洛伦兹变换下, k_{μ} 的变换式为

$$k'_{\mu} = a_{\mu\nu} k_{\nu} \quad (6.4.26)$$

对沿 x 方向的特殊洛伦兹变换, 从 Σ 系变换到 Σ' 系, 变换式为

$$\begin{aligned} k'_1 &= \gamma \left(k_1 - \frac{v}{c^2} \omega \right) \\ k'_2 &= k_2 \\ k'_3 &= k_3 \\ \omega' &= \gamma (\omega - vk_1) \end{aligned} \quad (6.4.27)$$

式中, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。

(3) 四维二阶张量

如果一个物理量有 16 个分量, 满足变换关系

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau} \quad (6.4.28)$$

这个物理量称为四维二阶张量。

以上所讨论的标量、矢量和张量在洛伦兹变换下有确定的变换性质, 这些物理量称为协变量。

3. 物理规律的协变性

如果一个方程的每一项属于同类协变量, 在参考系变换下, 每一项都按相同方式变换, 结果保持方程形式不变。例如, 某方程在参考系 Σ 中具有形式

$$F_{\mu} = G_{\mu} \quad (6.4.29)$$

式中, F_{μ} 、 G_{μ} 都是四维矢量, 在参考系变换下满足

$$F'_{\mu} = a_{\mu\nu} F_{\nu} = a_{\mu\nu} G_{\nu} = G'_{\mu} \quad (6.4.30)$$

因而在新的参考系 Σ' 下, 有 $F'_{\mu} = G'_{\mu}$, 方程形式与原参考系 Σ 中的方程形式一致。在参考

系变换下, 方程形式不变的性质称为协变性。相对性原理要求一切惯性参考系都是等价的。在不同惯性系中, 物理规律都可以表示为相同形式。如果物理规律的方程是协变的, 它就满足相对性原理的要求, 因此用四维形式可以很方便地将相对性原理的要求表达出来, 只要知道某物理量的变换性质, 就可以看出它是否具有协变性。

6.5 电动力学的相对论不变性

我们已经知道电磁场的基本规律不服从伽利略相对性原理, 从而修改了经典时空观, 代之以相对论时空观。根据相对性原理, 电磁现象的基本规律对任意惯性参考系都具有相同的形式。也就是说, 麦克斯韦方程组应该满足爱因斯坦的相对性原理。在洛伦兹变换下, 电动力学基本方程的形式应该不变, 本节的任务是将电动力学方程写成明显的相对论协变形式。

6.5.1 四维电流密度矢量

电荷守恒定律要求带电体的总电荷不因它的速度而改变。设一个带电粒子在电场中加速, 由电荷守恒定律可知, 加速后粒子所带的电荷与静止时所带的电荷相同, 因此带电体的总电荷不依赖于运动速度。

设 Σ' 系中有一静止带电体, 其总电荷为 $Q' = Q_0$, 在 Σ 系中观测, 该带电体以速度 \mathbf{u} 运动, 其电荷为 Q 。但由于带电体的总电荷不依赖于速度, 因此在 Σ 系中看到的 $Q = Q_0$, 由此可以得出

$$Q' = Q \quad (6.5.1)$$

即物体的总电荷是一个洛伦兹不变量, 不因参考系的改变而改变。

总电荷是电荷密度的体积分

$$Q = \int_V \rho dV = \text{不变量} \quad (6.5.2)$$

当粒子以速度 \mathbf{u} 运动时, 体积收缩了

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

为了保持总电荷 Q 的不变性, 即

$$dQ = dQ'$$

可以写成

$$\begin{aligned} \rho dV &= \rho' dV' = \rho_0 dV_0 \\ \rho dV &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} dV_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \rho_0 dV_0 \end{aligned}$$

ρ_0 为静止粒子的电荷密度。相应的电荷密度增大, 即

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma \rho_0 \quad (6.5.3)$$

因此当粒子以速度 \mathbf{u} 运动时, 其电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} = \gamma \rho_0 \mathbf{u} \quad (6.5.4)$$

如果引入电流密度的第四分量

$$J_4 = ic\rho = ic\gamma\rho_0 \quad (6.5.5)$$

四维速度矢量为

$$U_\mu = \gamma(\mathbf{u}, ic)$$

则可以写出四维电流密度矢量

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu \quad (6.5.6)$$

对应于四维空间矢量

$$x_\mu = (\mathbf{x}, ict)$$

电流密度四维矢量为

$$J_\mu = (\mathbf{j}, ic\rho) \quad (6.5.7)$$

电流密度 \mathbf{j} 和电荷密度 ρ 合为四维矢量显示出这两个物理量的统一性。当粒子静止时, 只有电荷密度 ρ_0 。当粒子运动时, 表现出有电流密度 \mathbf{j} , 同时电荷密度亦相应地改变。

由于相对论中时空的统一, 使得非相对论中不同的物理量显示出它们的统一性。电流密度 \mathbf{j} 与电荷密度 ρ 统一为四维矢量就是一个例子, 以后还有矢势 \mathbf{A} 和标势 φ 统一为四维势。

若参考系变换时, 四维电流密度矢量满足下列变换

$$J'_\mu = a_{\mu\nu} J_\nu \quad (6.5.8)$$

若 Σ' 系相对于 Σ 系以速度 \mathbf{v} 沿 x 方向运动时, 由变换矩阵式 (6.4.8) 可得四维电流密度矢量的变换关系为

$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(j_x - v\rho) \\ j'_y &= j_y \\ j'_z &= j_z \\ \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x\right) \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

式中, $J_1 = j_x$, $J_2 = j_y$, $J_3 = j_z$, $J_4 = ic\rho$ 。

再看电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

由于 $J_4 = ic\rho$, $x_4 = ict$, 则电荷守恒定律可以写成四维形式

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (6.5.10)$$

这个方程在惯性系变换下是协变的, 因为左边是洛伦兹标量, $\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}$ 是一个不变量, 因而式 (6.5.10)

对任意惯性系都是成立的。以上引入电流密度四维矢量把电荷守恒定律写成四维协变形式, 说明电荷守恒定律满足爱因斯坦的相对性原理。

6.5.2 四维势矢量

在讨论电磁波的辐射时,把麦克斯韦方程组通过电磁场势 \mathbf{A} 和 φ 表示出来,用势表示的麦克斯韦方程组在洛伦兹规范下为达朗贝尔方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

引入达朗贝尔算符

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (6.5.11)$$

该算符是洛伦兹标量算符。达朗贝尔方程可写成

$$\begin{aligned}\square \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \square \varphi &= -\mu_0 c^2 \rho\end{aligned} \quad (6.5.12)$$

式中, \mathbf{j} 激发矢势 \mathbf{A} , ρ 激发标势 φ , 既然 \mathbf{j} 和 ρ 构成一个四维电流密度矢量, 则 \mathbf{A} 和 φ 自然也应该成为一个四维矢量。若 \mathbf{A} 和 φ 合为一个四维势矢量

$$A_\mu = \left(\mathbf{A}, \frac{i}{c} \varphi \right)$$

则

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu \quad (6.5.13)$$

方程两边都是四维矢量。在洛伦兹变换下它们的变换规律应该一样, 即

$$\begin{aligned}A'_\mu &= a_{\mu\nu} A_\nu \\ J'_\mu &= a_{\mu\nu} J_\nu\end{aligned} \quad (6.5.14)$$

而 \square 在洛伦兹变换下是不变的

$$\square' = \square \quad (6.5.15)$$

所以达朗贝尔方程的四维形式式 (6.5.13) 在洛伦兹变换下是协变的。

洛伦兹规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 用四维形式表示为

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (6.5.16)$$

式 (6.5.16) 具有协变性, 是洛伦兹变换下的不变量。

若 Σ' 系相对 Σ 系沿 x 方向以速度 \mathbf{v} 运动时, 由变换矩阵式 (6.4.8) 可得四维电磁场势矢量 A_μ 的变换关系为

$$\begin{aligned}
 A'_x &= \gamma \left(A_x - \frac{v}{c^2} \varphi \right) \\
 A'_y &= A_y \\
 A'_z &= A_z \\
 \varphi' &= \gamma (\varphi - v A_x)
 \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

式中, $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$, $A_4 = i \frac{\varphi}{c}$ 。

达朗贝尔方程是由麦克斯韦方程得到的, 既然达朗贝尔方程在洛伦兹变换下保持不变, 就间接地说明了麦克斯韦方程组满足相对性原理。以下直接证明麦克斯韦方程组满足相对性原理。

6.5.3 电磁场张量

电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 可以用势表示出来

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
 \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

把它们写成直角分量的形式, 有

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \tag{6.5.18}$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \\
 E_2 &= ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) \\
 E_3 &= ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right)
 \end{aligned} \tag{6.5.19}$$

为了把 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 也写成统一的四维形式, 引入一个四维的电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{6.5.20}$$

式中, A_μ 为四维势矢量, 很明显 $F_{\mu\nu}$ 是一个四维二阶的反对称张量

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{6.5.21}$$

它的对角分量

$$F_{\mu\mu} = 0 \tag{6.5.22}$$

因此, 其独立分量只有 6 个, 把它用矩阵形式表示出来如下

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.5.23}$$

将式 (6.5.18)、式 (6.5.19)、式 (6.5.20) 相比较, 可以得出

$$\begin{aligned} B_1 &= F_{23} & B_2 &= F_{31} & B_3 &= F_{12} \\ E_1 &= \mathrm{i}cF_{14} & E_2 &= \mathrm{i}cF_{24} & E_3 &= \mathrm{i}cF_{34} \end{aligned}$$

把这些值填到 $F_{\mu\nu}$ 矩阵中

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5.24)$$

$F_{\mu\nu}$ 称为电磁场张量。

由此可见, 电场强度 \mathbf{E} 和磁感应强度 \mathbf{B} 的分量是四维电磁场张量的分量。电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的空间分量同磁场相联系, 这说明磁感应强度 \mathbf{B} 的分量构成一个三维二阶反对称张量, 电场强度 \mathbf{E} 的分量是 $F_{\mu\nu}$ 的时间分量。

用电磁场张量可以把麦克斯韦方程组写成更明显、更简洁的协变形式。麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.5.25a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.5.25b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.5.25c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.5.25d)$$

麦克斯韦方程组中的前两个方程是一对有源方程, 式 (6.5.25b) 的第一个直角坐标分量式为

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{\partial(-B_2)}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(-\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \right) = \mu_0 j_x$$

可以写成

$$\frac{\partial F_{1\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_1 \quad (6.5.26)$$

同理可得其他两个直角分量式为

$$\frac{\partial F_{2\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_2, \quad \frac{\partial F_{3\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_3 \quad (6.5.27)$$

再将式 (6.5.25a) 写成直角坐标形式

$$\frac{\mathrm{i}}{c} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) = \mu_0 (\mathrm{i}c\rho)$$

此式正是

$$\frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_4 \quad (6.5.28)$$

所以麦克斯韦方程组中一对有源方程式 (6.5.25a) 和式 (6.5.25b) 统一写成一个四维形式的张量方程

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \quad (6.5.29)$$

用同样的方法, 可将麦克斯韦方程中一对无源方程式 (6.5.25c) 和 (6.5.25d) 统一写成另一个四维形式的张量方程

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (6.5.30)$$

式 (6.5.29) 和式 (6.5.30) 是由麦克斯韦方程组的 4 个方程, 引入电磁场张量后统一写出的两个方程, 这两个方程中的每一项都是洛伦兹协变量, 因而这些方程在洛伦兹变换下是协变的, 这表明麦克斯韦方程组满足相对性原理。但是原先的电磁场是统一的电磁场张量的分量, 在相对论形式中应该用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 来统一描述电磁场。利用电磁场张量, 把麦克斯韦方程组全部写成了协变形式, 实现了相对性原理, 麦克斯韦电磁场方程和洛伦兹变换协调一致, 消除了相对论产生前实验与经典力学时空观所形成的矛盾。

6.5.4 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 在洛伦兹变换下的变换性质

电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 在洛伦兹变换下应满足变换关系

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau} \quad (6.5.31)$$

设 Σ' 系以速度 \mathbf{v} 沿 Σ 系的 x 轴方向运动, 这时的变换矩阵为

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

由上式可以看出

$$a_{2\mu} = \delta_{2\mu}, \quad a_{3\nu} = \delta_{3\nu}$$

例如

$$F'_{23} = a_{2\mu} a_{3\nu} F_{\mu\nu} = F_{23}$$

因为 $F_{23} = B_1$, 则有

$$B'_1 = B_1$$

再看 F'_{14}

$$\begin{aligned} F'_{14} &= a_{1\mu} a_{4\nu} F_{\mu\nu} = a_{11} a_{4\nu} F_{1\nu} + a_{14} a_{4\nu} F_{4\nu} \\ &= a_{11} a_{44} F_{14} + a_{14} a_{41} F_{41} \\ &= (a_{11} a_{44} - a_{14} a_{41}) F_{14} \\ &= F_{14} \end{aligned}$$

$$F'_{14} = F_{14} \quad F_{14} = -\frac{i}{c} E_1$$

则有

$$E'_1 = E_1$$

再看 F'_{12}

$$\begin{aligned} F'_{12} &= a_{1\mu} a_{2\nu} F_{\mu\nu} = a_{14} a_{2\nu} F_{4\nu} + a_{11} a_{2\nu} F_{1\nu} \\ &= a_{14} F_{42} + a_{11} F_{12} \\ &= \gamma F_{12} + i\beta\gamma F_{42} \end{aligned}$$

$$B'_3 = \gamma B_3 + i\frac{v}{c}\gamma\frac{i}{c}E_2 = \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2\right)$$

同理可得出 F_{13} 、 F_{24} 和 F_{34} 的变换关系，综合可得到电磁场的变换关系为

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & B'_1 &= B_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3) & B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3\right) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2) & B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2\right) \end{aligned} \quad (6.5.32)$$

还可写成矢量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{//} &= \mathbf{E}_{//} & \mathbf{B}'_{//} &= \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right)_{\perp} \end{aligned} \quad (6.5.33)$$

式中，//和 \perp 表示与相对速度 \mathbf{v} 平行和垂直的分量。

由以上电磁场的变换关系可知，电场和磁场是一种物质的两个方面，它们在不同参考系中有不同的特性。但是当参考系变换时，它们可以互相转化。就特殊情况而言，电场或磁场在一个参考系中可以等于零，而同时在另一个参考系中却又存在。矢势和标势统一为四维矢量，电场和磁场统一为四维张量，反映出电磁场的统一性和相对性。

从电磁场张量的变换式可以得到两个洛伦兹不变量，这些不变量当从一个惯性系变换到另一个惯性系时保持不变，这两个不变量是

$$E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2 \quad (6.5.34)$$

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (6.5.35)$$

例如，平面电磁波 $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ ，在这种情况下 $E^2 - c^2 B^2 = 0$ 。由于 $E^2 - c^2 B^2$ 为不变量，所以在任何惯性系观测平面电磁波都有 $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ 。 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ 为不变量，说明电场和磁场在任意一个惯性系是相互垂直的，即 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，那么在另外一个惯性系中也是相互垂直的。

【例 6-3】 求匀速运动电子的电磁场。

解：设一电子以速度 \mathbf{v} 做匀速运动，取 Σ' 系的原点 O' 系固定于电子上， x 轴沿电子的运动方向。在 $t=0$ 时刻，场点 P 相对于电子的位置矢量，在 Σ 系中观测为 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ，在 Σ' 系中观测为 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ ，两组坐标满足洛伦兹变换

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y' = y \quad z' = z$$

式中, $\beta = \frac{v}{c}$ 。而

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} S$$

$$S = [x^2 + (1-\beta^2)(y^2 + z^2)]^{\frac{1}{2}}$$

当 O' 与 O 重合时, Σ' 系测得 P 点的电磁场为

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \mathbf{r}' \quad \mathbf{B}' = 0$$

用 x, y, z 表示 \mathbf{E}' 的分量为

$$E'_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{ex}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2)$$

$$E'_y = \frac{ey'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{ey}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$E'_z = \frac{ez'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{ez}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

利用电磁场变换公式, 将 v 改为 $-v$, 将带 “'” 的量与不带 “'” 的量互换, 就得到在 Σ 系测得 P 点在同一时刻 ($t=0$) 的电磁场为

$$E_x = E'_x = \frac{ex}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2) \quad B_x = B'_x = 0$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ey}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2) \quad B_y = \frac{\frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{v}{c^2} E_z$$

$$E'_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ez}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2) \quad B_z = \frac{\frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{v}{c^2} E_y$$

可以写成矢量式

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 S^3} (1-\beta^2) \mathbf{r}$$

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) r^2 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}$$

对所得结果做如下讨论。

1. 对于非相对论情况 $v \ll c$, $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

上述两式分别为静止点电荷的电场和运动电荷的磁场表示式。

2. 当 $v \sim c$ 时

(1) 当 \mathbf{r} 平行于 x 轴, 即 \mathbf{r} 平行于 \mathbf{v} 时

$$\mathbf{E}_{//} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \ll \mathbf{E}_0$$

(2) 当 \mathbf{r} 垂直于 x 轴, 即 $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ 时

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \gg \mathbf{E}_0$$

(3) 当 \mathbf{r} 与 \mathbf{v} 之间的夹角为 θ 时

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{r}}{r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

可见, 当 $v \sim c$ 时, 电场分布不再是球对称的, 与 θ 有关, $\theta = 0$ 处最弱, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处最强。电场分布如图 6-7 所示,

由图可知, 电场趋向于集中在与 \mathbf{v} 垂直的平面上。在与 \mathbf{v} 垂直的方向电力线密集, 而沿 \mathbf{v} 方向电力线稀疏, 电力线的横向压缩可视为洛伦兹收缩的结果。

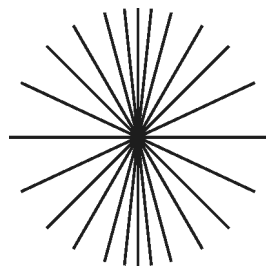


图 6-7 匀速运动的电子的电场分布

6.6 相对论力学

经典力学对伽利略变换是协变的。由于时空观的发展, 洛伦兹变换代替了伽利略变换。经典力学的原有形式也应该修改, 使它满足爱因斯坦相对论原理, 即在洛伦兹变换下具有协变性。从而能够正确地描述高速运动规律。并且当 $v \ll c$ 时, 相对论力学应该合理地过渡到牛顿力学。

6.6.1 能量-动量四维矢量

经典力学的基本规律是牛顿定律

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.6.1)$$

式中, \mathbf{F} 是作用于物体上的力, \mathbf{p} 是物体的动量。牛顿定律对伽利略变换是协变的。

在相对论中, 为了保持洛伦兹变换的不变性, 必须把式 (6.6.1) 修改为四维形式。为此引入四维动量矢量

$$p_\mu = m_0 U_\mu \quad (6.6.2)$$

U_μ 为四维速度矢量

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\mu}{dt}$$

四维动量矢量的空间分量和时间分量为

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \gamma m_0 \mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \\ p_4 &= m_0 U_4 = i c \gamma m_0 = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

当 $v \ll c$ 时, \mathbf{p} 趋于经典动量 $m_0 \mathbf{v}$, 因此, 可以认为 \mathbf{p} 是相对论动量。

现在讨论 p_4 的物理意义, 当 $v \ll c$ 时, p_4 的展开式为

$$p_4 = \frac{i}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \right) + \dots \quad (6.6.4)$$

式 (6.6.4) 括号内第二项是物体的动能, 由此看出 p_4 与物体的能量有关。在经典力学中, 力对物体所做的功率

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} \quad (6.6.5)$$

设式 (6.6.5) 在相对论中仍然成立

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \frac{m_0 v^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

由于力对物体所做的功率等于物体的能量增加率, 由式 (6.6.6) 得

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.6.7)$$

因而

$$p_4 = \frac{i}{c}W \quad (6.6.8)$$

当 $v=0$ 时, 物体的动能为零, 因此物体的动能为

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \quad (6.6.9)$$

$$W = T + m_0 c^2$$

从形式上看, W 含有两部分, 一部分是物体的动能 T , 另一部分是当物体静止时仍然存在的能量, 称为静止能量。本来在非相对论中, 对能量附加一个常数是没有意义的, 但是在相对论情况下, 必须进一步研究常数项的物理意义。这是因为 $m_0 c^2$ 项的出现是相对论协变性的要求, 删去这项或者用其他常数代替这项都不符合相对论协变性。 $m_0 c^2$ 是静止能量, 静止质量的揭示是相对论最主要的推论之一。要释放和利用这部分能量, 必须依靠核物理的手段, 近代物理实验已经证实了这一点, 并且已经应用在军事和民用上。

因此, 物体的动量和能量构成四维矢量 p_μ

$$p_\mu = \left(\mathbf{p}, \frac{i}{c}W \right) \quad (6.6.10)$$

p_μ 称为四维能量-动量矢量, 简称为四维动量。在洛伦兹变换下, 它应与四维矢量 x_μ 一样变换。

$$p'_\mu = a_{\mu\nu} p_\nu \quad (6.6.11)$$

当 Σ' 系相对于 Σ 系以速度 \mathbf{v} 沿 x 轴方向运动时, 四维动量矢量 p_μ 的变换式为

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c^2}W}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

$$W' = \frac{W - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.6.12)$$

由 p_μ 可构成不变量

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = \text{不变量} \quad (6.6.13)$$

在相对于物体静止的参考系中, $\mathbf{p}=0$, $W=m_0 c^2$, 因而不变量为 $-m_0^2 c^2$ 。

还可利用下列方法证明 $p_\mu p_\mu = \text{不变量}$ 。

$$p_\mu = m_0 U_\mu, \quad p_\mu p_\mu = m_0^2 U_\mu U_\mu$$

而

$$U_\mu U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = -\frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2$$

则

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (6.6.14)$$

由式 (6.6.14) 可得

$$\begin{aligned} p^2 c^2 + m_0^2 c^4 &= W^2 \\ W &= \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

式 (6.6.15) 是相对论中关于物体的能量、动量和质量的关系式。

若引入

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.6.16)$$

式 (6.6.3) 和式 (6.6.7) 转化为

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (6.6.17)$$

$$W = mc^2 \quad (6.6.18)$$

用式 (6.6.17) 表示动量时, 形式上和非相对论的公式一样。但 m 不再是一个不变量, 而是一个随运动速度增大的量, m 可以视为一种等效质量, 称为运动质量, 也称为相对论质量, 而不变量 m_0 称为静止质量。式 (6.6.18) 称为质能关系, 这是物体的总能量 W 与运动质量 m 之间的关系。质能关系是爱因斯坦狭义相对论中最有意义的结论之一。

在相对论建立以前, 人们将质量守恒定律与能量守恒定律视为两个互相独立的自然规律。在相对论中, 质能关系把这两条自然规律统一起来了, 质量守恒定律和能量守恒定律就是一个不可分割的定律了。

按照质能关系式 (6.6.18), n 个粒子在相互作用 (如碰撞) 过程中, 能量守恒关系式表示为

$$\sum_i W_i = \sum_i m_i c^2 = \text{常量}$$

由此式可以得出质量守恒关系式

$$\sum_i m_i = \text{常量} \quad (6.6.19)$$

按照质能关系, 质量的变化必须伴随着能量的变化, 而能量的变化同样伴随着质量的变化, 即

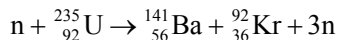
$$\Delta W = \Delta mc^2 \quad (6.6.20)$$

式 (6.6.20) 表明物体的能量每增加 ΔW , 相应地惯性质量也必定增加 $\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2}$; 反之

每减少 Δm 的质量, 就意味着释放出 $\Delta W = \Delta mc^2$ 的能量, 这就是原子能 (核能) 利用的理论依据。原子弹和氢弹技术都是狭义相对论质能关系的应用, 而它们的成功也成为狭义相对论的验证。

【例 6-4】 试比较原子核裂变和聚变过程中所释放出的能量。

解: 用中子轰击铀一类重原子核可分裂成两个中等质量的原子核的现象, 称为原子核的裂变, 在裂变反应中放出巨大能量。例如反应



反应物和生成物静质量之差 (质量亏损) 为

$$\Delta m = m_0 - m'_0$$

式中, m_0 为反应物的静止质量之和, $m_0 = m_n + M({}^{235}_{92}\text{U})$ 。 m'_0 为生成物的静止质量之和, $m'_0 = M({}^{141}_{56}\text{Ba}) + M({}^{92}_{36}\text{Kr}) + 3m_n$ 。

其中中子的静止质量

$$m_n = 10087\text{u}$$

${}^{235}_{92}\text{U}$ 的静止质量

$$M({}^{235}_{92}\text{U}) = 235.043\ 9\text{u}$$

${}^{141}_{56}\text{Ba}$ 的静止质量

$$M({}^{141}_{56}\text{Ba}) = 140.913\ 9\text{u}$$

${}^{92}_{36}\text{Kr}$ 的静止质量

$$M({}^{92}_{36}\text{Kr}) = 91.897\ 3\text{u}$$

则反应物的静止质量之和为

$$m_0 = 1.008\ 7\text{u} + 235.043\ 9\text{u} = 236.052\ 6\text{u}$$

生成物的静止质量之和为

$$m'_0 = 140.913\ 9\text{u} + 91.897\ 3\text{u} + 3 \times 1.008\ 7\text{u} = 235.837\ 3\text{u}$$

反应前后质量亏损为

$$\Delta m = m_0 - m'_0 = 236.0526\text{u} - 235.8373\text{u} = 0.215\ 3\text{u} = 0.357\ 4 \times 10^{-27}\text{kg}$$

其中原子质量单位

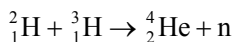
$$1\text{u} = 1.66 \times 10^{-27}\text{kg}$$

释放的能量

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta mc^2 = 0.357\ 4 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 3.216\ 6 \times 10^{-11}\text{J} \\ &= 2.01 \times 10^8\text{eV} = 201\text{MeV}\end{aligned}$$

以上计算结果表明, 在原子核裂变反应中, 一个铀原子能释放出能量 200MeV, 比化学反应中一个原子可提供的能量要大 10^7 倍。若 1kg 铀-235 全部裂变, 所放出的可利用的核能相当于约 2500t 标准煤燃料所放出的热能。

轻原子核聚合成较重原子核的核反应, 称为聚变反应。例如反应



反应之前静止质量之和为

$$m_0 = M(\text{D}) + M(\text{T}) = 2.014\ 1\text{u} + 3.016\ 0\text{u} = 5.030\ 1\text{u}$$

反应之后静止质量之和为

$$m'_0 = M(^4\text{He}) + m_n = 4.002\,6\text{u} + 1.008\,7\text{u} = 5.011\,3\text{u}$$

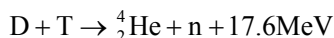
反应前后静止质量差为

$$\Delta m = m_0 - m'_0 = 0.018\,8\text{u} = 0.3127 \times 10^{-28} \text{kg}$$

释放出能量

$$\Delta W = \Delta mc^2 = 0.3127 \times 10^{-28} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.814\,3 \times 10^{-12} \text{J} = 17.6 \text{MeV}$$

上述聚变反应可以表示为



其中, D 表示氘核, T 表示氚核, 氘核和氚核可聚合为氦核, 同时放出一个中子, 并释放出 17.6 MeV 的能量。

人们利用重核裂变反应制成了原子弹, 利用轻核聚变反应制成了氢弹。聚变反应平均每个核子放出的能量 (约 17.6 MeV) 要比裂变反应平均每个核子所放出的能量 (约 1 MeV) 大得多。1945 年广岛爆炸的原子弹是两万吨级, 1952 年第一次氢弹热核爆炸是一千万吨级。

6.6.2 相对论力学方程

非相对论力学基本方程是牛顿定律, 现在把它修改为满足相对论协变性的方程。

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

动量和能量构成四维矢量 p_μ , 如果用固有时间间隔 $d\tau$ 量度能量-动量变化率, 外界对物体的作用用一个四维力矢量 K_μ 来描述, 则

$$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} \quad (6.6.21)$$

在低速运动情况下, K_μ 的空间分量应该过渡到经典力 \mathbf{F} , 式 (6.6.21) 应该过渡到经典力学的牛顿定律。 K_μ 的第 4 个分量 K_4 是与空间分量 \mathbf{K} 有关系的

$$\begin{aligned} -icK_4 &= \frac{dW}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ &= \frac{c^2}{W} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

因此, 作用于速度为 \mathbf{v} 的物体上的四维力矢量为

$$K_\mu = \left(\mathbf{K}, \frac{i}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \right) \quad (6.6.22)$$

相对论协变的力学方程包括以下两个方程

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dW}{d\tau} \end{aligned} \quad (6.6.23)$$

式 (6.6.23) 是用固有时间间隔 $d\tau$ 来量度的, 如果用参考系时间 dt 来表示, 可写为

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{K} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dW}{dt}\end{aligned}\quad (6.6.24)$$

若定义力为

$$\mathbf{F} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{K} \quad (6.6.25)$$

则相对论力学方程可以写成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.6.26)$$

力 \mathbf{F} 等于动量随时间的变化率

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{dt} \quad (6.6.27)$$

力 \mathbf{F} 所做的功率等于能量随时间的变化率。

式 (6.6.26) 与式 (6.6.27) 在形式上和非相对论力学一致, 但需注意, \mathbf{p} 和 W 是相对论的动量和能量。而且一般说来, 只有在低速情况下, \mathbf{F} 才等于经典力。

6.6.3 洛伦兹力

相对论力学的一个重要应用是研究带电粒子在电磁场中的运动。已知电磁场对带电粒子的作用力是洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.6.28)$$

以下将证明洛伦兹力公式满足相对论协变性的要求。由式 (6.6.25) 定义的力具有协变性。只要能够证明式 (6.6.28) 表示的洛伦兹力 \mathbf{F} 可以写成式 (6.6.25) 的形式, 即说明了洛伦兹力公式满足协变性要求。

用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 和四维速度 U_ν 构成一个四维矢量

$$K_\mu = qF_{\mu\nu}U_\nu \quad (6.6.29)$$

容易验证

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.6.30)$$

例如

$$\begin{aligned}K_1 &= qF_{1\nu}U_\nu \\ &= q(F_{11}U_1 + F_{12}U_2 + F_{13}U_3 + F_{14}U_4) \\ &= q\left[0 + B_3U_2 + (-B_2)U_3 + \left(-\frac{i}{c}E_1\right)U_4\right] \\ &= q\left(0 + B_3\gamma u_2 + (-B_2)\gamma u_3 + \left(-\frac{i}{c}E_1\right)\gamma ic\right) \\ &= q\gamma(E_1 + u_2B_3 - u_3B_2)\end{aligned}$$

同理可以写出 K_2 、 K_3 ，则有

$$\mathbf{F} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.6.31)$$

因此洛伦兹力满足相对论协变性要求。带电粒子在电磁场中的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.6.32)$$

适用于任意惯性系，可以描述高速粒子的运动。

至此，我们已经阐明电动力学的基本规律，包括麦克斯韦方程组、电荷守恒定律、洛伦兹力公式，均满足相对论协变性，即麦克斯韦的电磁场理论适用于一切惯性系的物理规律。

【例 6-5】 求光子的动量表示。

解：对于光子来说，它的静止质量 $m_0 = 0$ ，因此由质能关系

$$W = pc \quad (6.6.33)$$

光子的能量

$$W = h\nu = \hbar\omega \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

光子的动量

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k$$

\mathbf{k} 为波矢量，真空中 $k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ 。

用四维形式表示

$$\begin{aligned} k_\mu &= \left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c} \right) \\ k_\mu k_\mu &= k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.6.34)$$

光子四维波矢量 $k_\mu k_\mu = 0$ 给计算带来很大方便。

光子四维动量

$$p_\mu p_\mu = 0 \quad (6.6.35)$$

【例 6-6】 一个静止质量为 m_0 、能量为 W 的粒子，求它的速度 v 。

解：由能量和动量的关系式 $p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = W^2$ ，静止质量为 m_0 、能量为 W 的粒子具有动量

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W^2 - m_0^2 c^4}$$

又

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m v_i \\ W &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \end{aligned}$$

以上两式相比

$$\frac{p_i}{W} = \frac{v_i}{c^2}$$

写成矢量式

$$\frac{\mathbf{p}}{W} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{c^2}{W} \mathbf{p}$$

则有

$$v = c^2 \frac{p}{W} = \frac{c^2}{W} \cdot \frac{1}{c} (W^2 - m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{W^2}}$$

即

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{W} \right)^2}$$

讨论:

(1) 若该粒子的能量 $W \gg m_0 c^2$, 则由上式可知该粒子运动速度 $v \sim c$, 这样的情况是相对论性的;

(2) 若 $W \sim m_0 c^2$, 则 $v \ll c$, 这是非相对论性的。

这个结果告诉我们, 判别一个粒子的运动是否是相对论性的标准, 就是看它的总能量与它的静止能量的比值。

【例 6-7】 论证在真空中一个自由电子不能放出 (或吸收) 一个光子。

解: 放出光子就意味着产生电磁辐射。在真空中, 一个自由电子永远在做匀速直线运动, 没有加速度当然不会产生电磁辐射。

设一个静止质量为 m_0 、初始动量为 p 的自由电子, 放出一个光子, 光子的动量为 $\hbar k$, 后来总动量变为 p' , 仍为自由电子。根据动量守恒定律

$$p_\mu = \hbar k_\mu + p'_\mu \quad (6.6.36)$$

由于考虑的是自由粒子系统, 所以在任一惯性系中, 碰撞或反应前后, 能量和动量都守恒, 于是可以写成四维动量守恒的形式

$$\sum_{i=1}^N p_\mu^{(i)} = \sum_{f=1}^M p_\mu^{(f)} \quad (6.6.37)$$

则有

$$p_\mu p_\mu = \hbar^2 k_\mu k_\mu + p'_\mu p'_\mu + 2\hbar(p'_\mu k_\mu) \quad (6.6.38)$$

因为反应前后都是自由电子, 根据

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2, \quad p'_\mu p'_\mu = -m_0^2 c^2$$

其中认为放出光子前后, 电子的静止质量不会改变, 因为光子的静止质量为零, 即 $k_\mu k_\mu = 0$ 。

把这些关系代入式 (6.6.38) 中, 得到

$$2\hbar(p'_\mu k_\mu) = 0 \quad (6.6.39)$$

而

$$p'_\mu k_\mu = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} + p'_4 k_4 = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} - \frac{W'\omega}{c^2}$$

因为 $p_\mu p_\mu$ 是不变量, $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}$ 也与坐标系无关。通常是在实验室坐标系中做实验, 选实验室坐标系, 令三维矢量 \mathbf{p}' 与 \mathbf{k} 之间的夹角为 θ , 则

$$\begin{aligned} p'_\mu k_\mu &= |\mathbf{p}'||\mathbf{k}|\cos\theta - \frac{W'\omega}{c^2} = 0 \\ \cos\theta &= \frac{W'\omega}{c^2|\mathbf{p}'||\mathbf{k}|} = \frac{W'\omega}{c^2|\mathbf{p}'|\omega/c} = \frac{W'}{|\mathbf{p}'|c} \\ &= \frac{\sqrt{p'^2 c^2 + m_0^2 c^4}}{|\mathbf{p}'|c} = \frac{\sqrt{p'^2 + m_0^2 c^2}}{|\mathbf{p}'|} \end{aligned} \quad (6.6.40)$$

$\sqrt{p'^2 + m_0^2 c^2}$ 永远大于 p' , 故式 (6.6.40) 中 $\cos\theta > 1$, 这是不可能的。将 k 换成 $-k$ 得到同样结论, 则真空中一个自由电子不能放出或吸收一个光子。注意上述结论仅适用于真空中, 介质中 $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ 不成立, 所以介质中这个结论不再成立。

结束语：经典电动力学的局限性

我们已经看到在经典电动力学中, 麦克斯韦电磁场理论是现代物理学的和谐完美和统一性的典范。任何成功的理论都是有一定的适用范围, 也即存在一定的局限性。经典电动力学也具有一定的适用范围, 它是研究宏观领域电磁场的基本属性、运动规律及它和带电物质之间的相互作用。若应用到微观领域将受到限制。

可以计算一下在经典电动力学中作为点电荷处理的电子的固有能量。设电荷均匀分布在半径为 a 的球面上, 总电荷为 e , 则电场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\mathbf{r}}{r^3}$$

因此, 它的能量为

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_V \frac{e^2}{r^4} dV = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{e^2}{r^2} dr = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

对点电荷来说, 当 $a \rightarrow 0$ 时, $W \rightarrow \infty$, 即在一个点电荷周围存在着无穷大的能量。

电子的固有能量为无穷大。可是爱因斯坦的质能关系指出, 能量除以 c^2 即是质量, 电子具有无穷大的固有能量, 这就意味着电子的质量是无穷大的, 而质量在物理上是可观测量, 目前可精确地测定电子的静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 可知电子具有无穷大的固有能量是个荒谬的物理结果。这个荒谬的结论是从麦克斯韦基本原理导出的, 很自然得出一个结论: 麦克斯韦理论若应用于充分小的尺度上, 出现了自相矛盾的结果, 显然这个矛盾似乎是电动力学的内有矛盾。

现在的问题是这个充分小的尺度数量级为多大?

实验上已经测定了电子的静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，这样电子的固有能量应当与 $m_0 c^2$ 同数量级。

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sim m_0 c^2$$

即

$$a \sim \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 c^2} \equiv r_c, \quad r_c \sim 10^{-15} \text{ m}$$

$r_c \sim 10^{-15} \text{ m}$ 称为电子的经典半径，它决定了经典电动力学的适用范围，以上从基本原理得出了麦克斯韦理论的适用范围

$$r \gg \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 c^2}$$

经典电动力学在微观领域受到局限的主要原因在于，它对带电物质的描述只反映其粒子性的一面，而对电磁场的描述只反映其波动性的一面。事实上，带电粒子具有波动性，而电磁场也具有粒子性，只有在带电物质主要显示粒子性，而电磁场主要显示其波动性的情况下，经典电动力学的计算结果才能近似地反映客观实际。在原子内电子的波动性明显，必须用波函数而不是经典轨道来描述电子的运动状态，因此，在这范围内经典电动力学是不适用的，当电磁场的粒子性显著时，如辐射的高频端和光电效应等问题，经典电动力学也是不适用的。

习 题

- 6.1 有两个惯性系 Σ 和 $\Sigma'(x', y', z')$ ，它们的 x 轴与 x' 轴重合， y 轴与 y' 轴平行， z 轴与 z' 轴平行； Σ' 系以匀速 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ 相对于 Σ 系运动，在 $t = 0$ ， $t' = 0$ 时刻，这两系的原点 O 和 O' 重合。
- (1) 试证明： Σ 系中一个半径为 R 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ，在 Σ' 系观测，是一个椭球面；
 - (2) 在 $t = 0$ 时刻，从原点 O 发出的光，在 Σ 系的 t 时刻观测，这光的波前是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ ，试证明，在 Σ' 系观测，这光的波前也是球面；
 - (3) 在 Σ 系观测，两个都是球面；而在 Σ' 系观测，则一个是椭球面，一个是球面，你认为这是否有矛盾？
- 6.2 一直山洞长 1 km ，一列火车静止时，长也是 1 km 。若这列火车以 $0.600c$ 的速度行驶时，穿过该山洞。A 是站在地面上的观测者，B 是坐在火车上的观测者。
- (1) 从车前端进洞到车尾端出洞，A 观测到的时间是多长？B 观测到的时间是多长？
 - (2) 整个列车全在洞内的时间是多长？
- 6.3 (1) 爱因斯坦在他创立狭义相对论的论文《论运动物体的电动力学》中说，地球赤道上的钟比地球两极的钟走得慢些。假定地球的年龄已经有 50 亿年，在地球诞生时便在赤道和两极放有相同的钟，M 则赤道上的钟现在比两极的钟慢了多少？
- (2) 我国古代神话说：“洞中方七日，世上已千年。”假定“洞中”是某一宇宙飞船中，“世上”就是地球上。则该宇宙飞船相对地球的速度是多少？
- 6.4 物体 A 以速度 $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ 相对参考系 Σ' 运动， Σ' 系又以速度 $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ 相对于惯性系 Σ 运动，则 A 相对

于 Σ 系的速度为 $\boldsymbol{V}=(V,0,0)$ ，其中 $V=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$ ，这就是著名的爱因斯坦速度叠加定理。试证明：当

$u < c$, $v < c$ 时, $V < c$ 。

6.5 当 Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 轴方向以速度 \boldsymbol{v} 运动时，利用 $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ 写出洛伦兹变换关系式。

6.6 由电磁场量在不同惯性系中的变换关系证明两个电磁场的不变量。

$$\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2$$

并说明其物理意义。

6.7 参考系 Σ' 以匀速 $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$ 相对于惯性系 Σ 运动。在 Σ 系观测，空间某区域有静磁场 $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$ 。

(1) 求在 Σ' 系观测，该区域内的电磁场；

(2) 若该区域内有一电荷量为 q 的粒子相对于 Σ 系静止，求在 Σ' 系观测，这个粒子所受的力。

6.8 利用四维动量守恒，解释康普顿散射。

参 考 文 献

- [1] 郭硕鸿. 电动力学 (第3版). 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [2] 蔡圣善, 朱来云. 经典电动力学. 上海: 复旦大学出版社, 1985.
- [3] 梁绍荣, 王雪君. 电动力学. 北京: 北京师范大学出版社, 1986.
- [4] 尹真. 电动力学. 南京: 南京大学出版社, 1999.
- [5] 俞允强. 电动力学简明教程. 北京: 北京大学出版社, 1999.
- [6] 虞福春, 郑春开. 电动力学. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [7] 何启智. 电动力学. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [8] 阚仲元. 电动力学. 济南: 山东教育出版社, 1988.
- [9] 王明达, 王秀江. 电动力学. 长春: 吉林大学出版社, 1988.
- [10] 林璇英, 张之翔. 电动力学题解. 北京: 科学出版社, 1999.
- [11] 何宝鹏等. 电动力学提要与题析. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.
- [12] 杰克逊. 经典电动力学. 北京: 高等教育出版社, 1980.
- [13] 巴蒂金等. 电动力学习题集. 北京: 高等教育出版社, 1980.
- [14] 汪映海. 电动力学. 兰州: 兰州大学出版社, 1995.
- [15] 吴寿镠, 丁士章. 电动力学 (第2版). 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [16] 罗春荣, 陆建隆. 电动力学 (第3版). 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [17] 张维坝, 宋福等. 电动力学教学指导 (第2版). 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [18] 胡友秋, 程福臻. 电磁学与电动力学 (第2版). 北京: 科学出版社, 2014.
- [19] 陈抗生. 电磁场与电磁波 (第2版). 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [20] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波 (第4版). 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [21] 赵晓鹏, 尹剑波. 电场调控的智能软材料. 北京: 科学出版社, 2011.
- [22] 赵晓鹏, 刘亚红. 微波超材料与超表面中波的行为. 北京: 科学出版社, 2016.